AN ELEMENTARY TREATISE

ON THE

THEORY OF EQUATIONS

WITH A COLLECTION OF EXAMPLES

BY

I. TODHUNTER, M. A., F. R. S.

TRANSLATED INTO URDU

BY

MUNSHI MAHAMMAD ZAKA-UL-LAH,

Head Master, Normal School, Delhi

IN FURTHERANCE OF THE OBJECTS OF THE SCIENTIFIC SOCIETIES OF ALLYGURH AND SUBA BEHAR

رسالہ مسائل معادلات

معہ بہت سي مثالوں کے

مؤلفہ

ٹاڈ ھنٹر صاحب ایم اي ایف آر ایس

جسکو

منشي محمد ذکاء الله صاحب ھیڈ ماسٹر نارمل اسکول دھلي نے

بتائید مقاصد

سین ٹیفک سوسئیٹي علیگڈھ و سین ٹیفک سوسئیٹي صوبہ بہار

اُردو میں ترجمہ کیا

اور

بمقام دھلي مطبع مرتضوي میں باھتمام حاجي

محمد عزیزالدین کے مطبوع ھوا

سنہ ۱۸۷۱ ع

بسم اللہ الرحمن الرحیم

دیباچہ

اس رسالہ مین جملہ مسائل معادلات کی جو اکثر کتب اصولیہ مین ہوا کرتے ہین لکھی ہین اور اونکی ساتھ
بہت سی مثالین یونیورسٹی کی سوالات امتحان سی منتخب کرکے تحریر کی ہین

مسائل معادلات مین اکثر عجیب و غریب اور دلچسپ ایسی نتایج ہوتی ہین کہ اگر طالب علم ابتدائ
تحصیل علوم ریاضیہ مین اون کو تحصیل کرلے تو بہت فایدی اوسکو حاصل ہوتی ہین اس رسالہ
کو وہی طالب علم پڑہ سکتی ہین جو الجبرا سی خوب ماہر ہین اسمین کہین بڑی علم کی ضرورت
سواء دفعات ۱۷۵ و ۲۶۷ و ۳۰۸ ـ ۳۱۴ کے نہین پڑتی ان دفعات کو طالب علم
جب تک نہ مطالعہ کرین کہ وہ علم مثلث مین ضابطہ ڈی موئور سے واقف ہون
یہہ کتاب حقیقت مین ایک ضمیمہ بڑی جبر مقابلہ کا ہی اسلئی اس کتاب مین حوالہ جابجا
جبر مقابلہ کی دفعات کا دیا گیا ہے

اس رسالہ مین ایسی تحقیقاتین بہت سی لکھی گئی ہین جنکا نام بہی کسی اور رسالہ مسائل معادلات مین نہین پایا جاتا
مثلاً اونمین سی ایک کاچی کا ثبوت ہی کہ ہر مساوات کی ایک قیمت ہوتی ہی ہورنر کی ترکیب اور
مسائل اسقاط اور ضابطہ کاچی صاحب کا خیالی قیمتون کی تعداد کی بیان مین اور ضابطہ مقطعات
کا عرض یہہ مضامین و دربعض اور اوسکی اسی کتاب مین اول اول لکھی گئی ہین ——
جناب ٹوڈہنٹر صاحب کی تصنیفات مین یہہ عجیب کتاب ہے فہرست مضامین یہہ ہے

باب	مضمون	صفحہ
پہلا باب	دیباچہ	١
دوسرا باب	وجود قیمت کے بیان میں	١٤
تیسرا باب	خواص معادلات	٢٢
چوتھا باب	تبدل ہیئت مساوات	٣٢
پانچوان باب	ڈس کارٹس کا قاعدہ علامات	٤٠
چھٹا باب	مساوی قیمتین	٤٧
ساتوان باب	مساوات کی قیمتون کی حدود غائی اور قیمتون کا جدا جدا کرنا	٥٦
آٹھوان باب	قیمتین محدودہ و ناطقہ	٦٢
نوان باب	تنزل معادلات	٧٩
دسوان باب	معادلات متکافیہ	٨٤
گیارہوان باب	معادلات ثنائی	٨٩
بارہوان باب	معادلات مکعبی	٩٨
تیرہوان باب	معادلات درجہ چہارم	١٠٩
چودہوان باب	سٹرم صاحب کا ضابطہ	١١٧
پندرہوان باب	فوریر کا ضابطہ	١٢٧
سولہوان باب	لاگرانج کی ترکیب تقریب	١٣٣
سترہوان باب	نیوٹن صاحب کی ترکیب تقریب اور فوریر کا ضمیمہ	١٤٠
اٹھارہوان باب	ہورنر کی ترکیب	١٤٨
انیسوان باب	قیمتون کے بالقرینہ جملے	١٦٢
بیسوان باب	استعمال بالقرینہ جملون کا	١٧١
اکیسوان باب	قیمتون کی قوتون کے مجموعے	١٧٧
بائیسوان باب	دور کرنا مقادیر مجہول کا یعنی اسقاط	١٨٦
تئیسوان باب	سلسلہ مین جملہ کا پھیلانا	١٩٩
چوبیسوان باب	مسائل متفرقہ	٢٠٧
پچیسوان باب	ادخال مقطعات	٢٢٧
چھبیسوان باب	خواص مقطعات	٢٣٨
ستائیسوان باب	استعمال مقطعات	٢٤٧
	مثالین	٢٦٧
	جواب	٢٨٧

دیباچہ

(۱) جبر مقابلہ کی بائیسوین باب مسائل مساوات مین طالب علم نی پڑہا ہوگا کہ مساوات ا لا۲ + ب لا + ج = ۰ کی دو قیمتین یعنی

$$\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{2} - ۴ اج}}{۲ا}$$

ہین اوران قیمتون کی کیفیت یہہ ہی کہ اونکا مجموعہ برابر ہی $-\frac{ب}{ا}$ کی اور حاصل ضرب برابر ہے $\frac{ج}{ا}$ کی یعنی مجموعہ ان قیمتون کا برابر ہی مساوات لا۲ + $\frac{ب}{ا}$ لا + $\frac{ج}{ا}$ = ۰ کی دوسری رقم کی سر کی جسکی علامت بدلی ہوئی ہی اور اونکا حاصل ضرب برابر ہی اس مساوات کی اخر رقم کے پس اب طالب علم اس مضمون کو خوب غور سی خیال کر کی سمجھہ لی کہ اس رسالہ کی تمام مضامین اسی قسم کی ہین جبر مقابلہ مین تو مساوات درجہ دوم کی خواص بیان ہوئی یہان مساوات درجہ دوم سی اعلی درجہ کی مساواتون کے خواص اور مسائل بیان ہونگی گویا یہہ اوسیر جو ہم نی لکہا ہی وہ ایک نمونہ ہی اوسپر قیاس کر کی طالب علم اس کتاب کے ساری مضامین کا تصور ذہن مین پیدا کر سکتا ہی ـــــ یہہ نتایج اور مسائل جو بیان ہونگی وہ اور فروع ریاضیہ مین کام اینگے اوران مسائل کی مشق طلبہ کی واسطی نہایت سودمند ہوگی جو طالب علم کہ علم جبر مقابلہ جانتی ہین اونکو اس قبیل کی مشق چندان مشکل اور دشوار بہی نہین یہہ ایک مضمون بوقلمون اونکی توجہ اور مطالعہ کی عادت بڑہانی کی واسطی ایک عجب چیز ہے

(۲) مساوات اور قیمت مساوات کے معنی طلبہ علم جبر مقابلہ مین خوب سمجھہ گئی ہونگی مگر ہم اونکی یہان تعریف پہر لکہتی ہین جسی مطلب خوب صاف اور عیان ہوجاے

جس جبریہ جملی مین لا مندرج ہو اوسکو جملہ لا کا کہتی ہین اور ج (لا) سی تعبیر کرتی ہین اور جو مقدار لا کی جگہ ج (لا) مین رکہی جاتی ہی اور وہ ج (لا) کو فنا اور نابود کردی اوسکو قیمت مساوات

ج (لا) = ۰ کی کہتے ہین (اس ساری کتاب بین مساوات اور معادلہ کی ایک ہی معنی ہین مترجم)

ا لا^ن + ب لا^(ن-۱) + س لا^(ن-۲) + ۰ ۰ + ک لا + ل

کی صورت کا جو جملہ ہو اور اوسمین ن مثبت صحیح عدد ہو اور مثال ا د ب و س ۰ ۰ ک د ل مین لا دخل نہ رکہتا ہو تو اوسکو ن درجہ کا صحیح جملہ ناطق لا کا کہتے ہین اور اگر ہم کو یہہ دریافت کرنا ہو کہ وہ کونسی لا کی قیمت ہی کہ اس جملہ کو فنا کرتی ہی تو اوسکی یہہ معنی ہونگی کہ ہم ن درجہ کی صحیح ناطق مساوات کی قیمت دریافت کرتی ہین اس رسالہ مین ساری بحث اسی مساوات پر ہوگی اسی مساوات مین اگر ہم چاہین تو لا کی قوت اعلی کی مثال پر مساوات کو تقسیم کرکی سر اوس اعلی قوت کا ایک بنالین تو مساوات کی یہہ صورت ہو جائیگی

لا^ن + ع ۱ لا^(ن-۱) + ع ۲ لا^(ن-۲) + ۰ ۰ + ع ن-۲ لا^۲ + ع ن-۱ لا + ع ن = ۰

اس مساوات کو سادہ صورت مساوات کہتی ہین اور اس سادگی کی کیفیت اگی کہل جائیگی جب لا^ن کا سر ایک ہوتا ہی تو خواص مساواتون کی بہت ٹہیک ٹہیک اور درست بیان ہوتی ہین اور جب یہہ سر نہین ہوتا تو مساواتون کی خواص بیان کرتی مین کچہہ دقت پڑتی ہی اگر ہم کو یہہ منظور نہ ہو کہ لا کے مثال کو واحد بنائین تو اوسکو ع سی تعبیر کرین تو مساوات کی یہہ صورت ہو جائیگی

ع ۰ لا^ن + ع ۱ لا^(ن-۱) + ع ۲ لا^(ن-۲) + ۰ ۰ ۰ + ع ن-۲ لا^۲ + ع ن-۱ لا + ع ن = ۰

(۳) یہہ ہمیشہ یاد رکہنی کی بات ہی کہ ہماری مساوات یا معادلہ سی مراد یہہ ہوتی ہی کہ صحیح ناطق مساوات ہے اور اگر وہ مساوات اس صورت کی نہ ہو تو تحویلات جبریہ سی اس صورت کی طرف تحویل ہو سکتی ہے مثلاً مساوات ۹ لا^۲ + ب لا + س √لا = ف تو یہہ مساوات مساوات منطق کی طرف اسطرح تحویل ہو سکتی ہی کہ س √لا اور ف کو منتقل کرکی مجذور کرلین تو مساوات منطق صحیح درجہ چہارم کی بنجائیگی جن مساواتون مین لوگارثمی جملی یا قوت نمای جملی یا علم مثلثی جملی یا اصم جملے مندرج ہون وہ ہمارے تحقیقات کی اندر بالتصریح داخل نہین ہونگین مثلاً اس قسم کی مساواتین کہ لا - جی لا = ۰ اور لا لوک لا - ا = ۰ داخل نہین ہو مگر ہماری تحقیقات مین ضمناً ایسی مساواتون

پر کہ خارج از بحث ہین کچہہ نہ کچہہ اپنا تصرف دکہا ئینگے

جہان کہین ہم جملہ ج (لا) لکہین تو اوس سی ہماری ہمیشہ جملہ صحیحہ ناطقہ لا سی مراد ہوگی بشرطیکہ اوسکے خلاف نہ بیان کیا گیا ہو

(۴) ایک بڑی بات امثال ع، ع، ع، ... ع ن کی نسبت اس مساوات

$$ع_0 لا^{ن} + ع_1 لا^{ن-1} + ع_2 لا^{ن-2} + \dots + ع_{ن-2} لا^2 + ع_{ن-1} لا + ع_ن = 0$$

مین ہمارے ہوتی ہی مساوات درجہ دوم ا لا² + ب لا + ح = ۰ کو ہم حل کرسکتی ہین خواہ ا اور ب اور ح کو جانین یا نہ جانین کہ وہ کونسی خاص اعداد ہین ہم فقط اتنی بات جاننی کی محتاج ہین کہ ا اور ب اور ح ایسی ہین کہ وہ لا سی کچہہ لگاؤ نہین رکہتی مثلاً مساوات لا² − ۱۲ لا + ۱۵ = ۰ کی حل کرنی ہو تو خواہ ۱۵ کو منتقل کرکی مجذور کامل بنائین اور حسب دستور حل کرین یا دفعہ اول مین جو صورت عامہ لکہی ہوئی ہی اوسمین ا = ۱ اور ب = −۱۲ اور ح = ۱۵ کے لکہین

اگر ہم ایسی مساوات حل کرنی چاہین کہ اوسمین اول سی امثال کی واسطی عددی قیمتین معین ہوئی ہون تو ایسی حل کو ہم حل جبریہ مساوات کا کہتی ہین اور اگر ہم حل جبریہ مساوات عامہ کا حاصل کرلین تو جس درجہ کی مساوات کا یہ حل ہوگا اوس درجہ کی مساوات کا حل عددی فقط اوسی صورت عامہ کی امثال کی جگہ اعداد اوس حل جبریہ مین رکہنی سی حاصل ہو جائیگا جب آگے ہم پڑہینگے تو یہہ بات ہم کو معلوم ہوگی کہ حل جبریہ فقط چوتہی درجہ کی مساوات تک کا ہو سکتا ہے مگر تیسرے درجہ اور چوتہی درجہ کی مساواتون کی امثال عددی جب اوس درجہ کی صورت مساوات عامہ کی حل جبریہ مین رکہتی ہین تو نتایج ایسی حاصل ہوتے ہین کہ وہ عملاً کسی کام کی نہین ہوتی ہین اور چوتہی درجہ کی مساوات سی زیادہ درجہ کی مساواتون کا حل جبریہ ابتک نہین ہوا ہے اور نہ ایندہ اوسکی ہونی کی امید ہے

مگر وہ حل جسکو ہم حل حسابیہ معادلات کا کہتی ہین اور جسمین امثال عددی ہوتی ہین اونمین زیادہ کارروائی کامیابی کی ساتہہ ہوسکتی ہی مثلاً پانچوین درجہ کی مساوات عامہ

کا حل جبریہ کسی طرح نہین ہو سکتا مگر حل حسابیہ مین حساب لگانی سی پانچوین درجہ کی مساوات کا جسمین امثال اعداد ہون حل حاصل ہو سکتا ہی اور یہہ تو ضروری ہی کہ قیمت تقریبی حاصل کر لین جیسی چاہین

(۵) اس جملہ $ع_0 لا^{ن} + ع_1 لا^{ن-1} + ع_2 لا^{ن-2} + \cdots + ع_{ن-2} لا^2 + ع_{ن-1} لا + ع_ن$ کو ج (لا) سی تعبیر کرین اور اس جملہ کی قیمت جو لا کی جگہ ا رکھنی سی ہو اوسکو ج (ا) سی تعبیر کرین تو ہم یہہ بتلائینگے کہ ج (ا) کی عددی قیمت کا حساب ج (لا) کی امثال اور خود ا کو خاص اعداد کے فرض کرنی سی بہت آسانی سی ہو جاتا ہے

مثلاً تیسرے درجہ کا جملہ ہو تو ہم عددی قیمت

$$ع_0 ا^3 + ع_1 ا^2 + ع_2 ا + ع_3$$

کی دریافت کرنی چاہتے ہین

اول یہہ حاصل ہوتا ہے کہ $ع_0 ا$

$ع_1$ کو جمع کرو تو یہہ حاصل ہوگا $ع_0 ا + ع_1$

ا مین ضرب دو تو یہہ حاصل ہوگا $ع_0 ا^2 + ع_1 ا$

$ع_2$ کو زیادہ کرو تو یہہ حاصل ہوگا $ع_0 ا^2 + ع_1 ا + ع_2$

ا مین ضرب دو تو یہہ حاصل ہوگا کہ $ع_0 ا^3 + ع_1 ا^2 + ع_2 ا$

$ع_3$ زیادہ کرو تو یہہ حاصل ہوگا $ع_0 ا^3 + ع_1 ا^2 + ع_2 ا + ع_3$

اس عمل کو اس ترتیب سے لکھو کہ

$ع_0$	$ع_1$	$ع_2$	$ع_3$
	$ع_0 ا$	$ع_0 ا^2 + ع_1 ا$	$ع_0 ا^3 + ع_1 ا^2 + ع_2 ا$
	$ع_0 ا + ع_1$	$ع_0 ا^2 + ع_1 ا + ع_2$	$ع_0 ا^3 + ع_1 ا^2 + ع_2 ا + ع_3$

ج (لا) کتنی ایک درجہ کا ہو اوسپر اسی عمل کو مرعی رکھو مثلاً عددی قیمت $3 لا^4 - 2 لا^3 - 5 لا + 7$ کی جب $لا = 3$ ہو دریافت کرنی ہو

۳	۲−	۰	۵−	۷+
۳	۹+	۲۱	۶۳+	۱۷۴+
۳	۷+	۲۱+	۵۸+	۱۸۱+

پس حاصل ۱۸۱ ہوا

(۶) اگر لا = ۱ کی سی جملہ صحیحہ ناطقہ کو فنا کری تو وہ جملہ پورا لا − ۱ پر تقسیم ہوگا

فرض کرو کہ ج (لا) اوس جملہ کو تعبیر کری اور ہم کو یہہ معلوم ہی کہ ج (لا) = ۰ تو ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ ج (لا) لا − ۱ پر پورا تقسیم ہوگا

ج (لا) کو لا − ۱ پر موافق قاعدہ مروج جبریہ کی تقسیم کیجائے جب تک کہ باقی میں لا نہ رہی اور فرض کرو کہ ق خارج قسمت ہی اور اگر کوئی باقی رہتی ہی تو وہ ر ہی تو

ج (لا) = ق (لا − ۱) + ر اس متطابقہ میں لا کی جگہ ۱ رکھو تو اس سبب سے کہ ق جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہی تو وہ لا = ۱ کی رکھنی سی لا نہایت نہیں ہو سکتا اسواسطی جب لا = ۱ کی ہو تو ق (لا − ۱) فنا ہو جائیگا اور بموجب فرض کی لا = ۱ کے ہونی سی ج (لا) بھی فنا ہوتا ہی اسلئی جب لا = ۱ کے ہو تو ر بھی فنا ہوتا ہی اور چونکہ ر میں لا نہیں ہی تو جب وہ لا = ۱ کے ہونی سی فنا ہوتا ہی تو وہ ہمیشہ فنا ہوگا یعنی ر = ۰ اور لا − ۱ تقسیم ج (لا) کو پورا کرتا ہی

(۷) جس مسئلہ کا ثبوت اوپر لکھا ہی وہ ثبوت ایک عظمت رکھتا ہی اور سمجھہ کو بڑہاتا ہی مگر اوسکے ثبوت کو ایک اور طرح لکھتی ہیں اور اسمیں خارج قسمت ق کی ایسی صورت ظاہر ہوتی ہی کہ اوسی اور زیادہ فایدہ ہوتا ہی فرض کرو کہ

$$ج (لا) = ع_۰ لا^ن + ع_۱ لا^{ن-۱} + ع_۲ لا^{ن-۲} + \cdots + ع_{ن-۲} لا^۲ + ع_{ن-۱} لا + ع_ن$$

چونکہ ج (۱) = ۰ تو ج (لا) = ج (لا) − ج (۱)

$$= ع_۰ (لا^ن - ۱^ن) + ع_۱ (لا^{ن-۱} - ۱^{ن-۱}) + ع_۲ (لا^{ن-۲} - ۱^{ن-۲}) + \cdots + ع_{ن-۱} (لا - ۱)$$

اب جبر مقابلہ کی دفعہ ۳۸۴ کی موافق $لا^ن - ۱^ن$ اور $لا^{ن-۱} - ۱^{ن-۱}$ . . . میں سے ہر یک لا − ۱ پر پوری تقسیم ہوتی ہی اب اس تقسیم کے کرنے سی ہم کو خارج قسمت یہہ حاصل ہوگا کہ

$ع_{.}(ا^{ن-۱} + ا\,لا^{ن-۲} + ا^{۲}لا^{ن-۳} + \dots + ا^{ن-۲}لا + ا^{ن-۱})$

$+ع_{۱}(لا^{ن-۲} + ا\,لا^{ن-۳} + ا^{۲}لا^{ن-۴} + \dots + ا^{ن-۲})$

$+ \dots$

$+ع_{ن-۲}(لا + ا)$

$+ع_{ن-۱}$

اب اس خارج قسمت کو اس ترتیب سی لکھتی ہین کہ

$ع_{.}لا^{ن-۱} + (ع_{.}ا + ع_{۱})لا^{ن-۲} + (ع_{.}ا^{۲} + ع_{۱}ا + ع_{۲})لا^{ن-۳} + \dots$

$+ ع_{.}ا^{ن-۱} + ع_{۱}ا^{ن-۲} + \dots + ع_{ن-۱}$

اور اسکو ہم

$ق_{.}لا^{ن-۱} + ق_{۱}لا^{ن-۲} + ق_{۲}لا^{ن-۳} + \dots + ق_{ن-۲}لا + ق_{ن-۱}$

سے تعبیر کرتی ہین

اسواسطے یہہ امثال جدید امثال قدیم سی ان صورتوں مین اسطرح مربوط ہوتے ہین

$ق_{.} = ع_{.}$ اور $ق_{۱} = ا\,ق_{.} + ع_{۱}$ اور $ق_{۲} = ا\,ق_{۱} + ع_{۲}$

اور $ق_{۳} = ا\,ق_{۲} + ع_{۳}$ . . . . .

یعنی ہر یک امثال جدید اسطرح حاصل ہوتا ہی کہ ہر یک امثال جدید کو اوسکی ماقبل کے امثال جدید مین ضرب دو اور ما حصل پر متناظرہ امثال قدیم زیادہ کرو اور یہہ بھی خیال کرنا چاہیے کہ ہر یک امثال جدید دفعہ ۵ کے عمل سی حاصل ہوتا ہے

(۸) اگر ج (لا) ایک جملہ صحیح ناطقہ لا کا ہو اور اوسکو لا - ا تقسیم کرنا ہو تو ا قیمت مساوات ج (لا) = ۰ کے ہوگی

دلیل فرض کرو کہ ج (لا) کو جب لا - ا پر تقسیم کرین تو خارج قسمت ق نکلتا ہے تو ج (لا) = ق (لا - ا)

اگر اس متطابقہ مین لا کی جگہ ا رکھین تو ق کی لا انتہا نہ ہونی کی سبب سے ق (لا - ا)

فنا ہوتا ہی پس جب لا = ا کے ہو تو ج (لا) فنا ہوتا ہی اسواسطی اثبت مساوات ح (لا) = ۰ کی ہے

(۹) جب کوی جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا لا ـ س پر تقسیم کیا جاے اور س ایک مقدار مستقل ہو تو باقی کو دریافت کرو

فرض کرو کہ ح (لا) جملہ صحیحہ ناطقہ لا کو تعبیر کرتا ہی اور ح (لا) کو لا ـ س پر تقسیم کرو جب تک کہ باقی کو کچہہ لگاو لا سی نہ رہی اور ق خارج قسمت نکلی اور ر باقی ہی تو

ح (لا) = ق (لا ـ س) + ر

اس مطابقہ مین س کی جگہہ لا رکہو تو ق لانہایت نہ ہوگا اور اسیواسطی ق (لا ـ س) فنا ہوگا اور ح (س) = ۰ یعنی جب لا = س کی ہو تو ر برابر ح (س) کے ہوگا اور ر مین لا کے نہ شامل ہوتی سی ہمیشہ ر برابر ح (س) کے ہوگا

مثلاً اگر ۳ لا^۴ ـ ۲ لا^۳ ـ ۵ لا + ۷ کو لا ـ ۳ پر تقسیم کرین تو خارج قسمت ۳ لا^۳ + ۷ لا^۲ + ۲۱ لا + ۵۸ ہوگا اور باقی ۱۸۱ ہینگی دفعات ۵ اور ۷ کو دیکہو

(۱۰) فرض کرو کہ ح (لا) جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہی اور لا کی جگہہ لا + ی رکہو اور ح (لا + ی) کو موافق قوای کے لکہو اور مختلف قوا کے امثال دریافت کرو

فرض کرو کہ ح (لا) = ع. لا^ن + ع۱ لا^(ن-۱) + ع۲ لا^(ن-۲) + ... + ع ن-۱ لا + ع ن تو

ح (لا + ی) = ع. (لا + ی)^ن + ع۱ (لا + ی)^(ن-۱) + ع۲ (لا + ی)^(ن-۲) + . . . + ع ن-۱ (لا + ی) + ع ن

(لا + ی)^ن اور (لا + ی)^(ن-۱) . . . کو بموجب ضابطہ جملہ ثنائی کی پہیلاو اور کل ماحصل کو موافق قوای کے لکہو تو ح (لا + ی) کے واسطی یہہ سلسلہ حاصل ہوگا کہ

ع. لا^ن + ع۱ لا^(ن-۱) + ع۲ لا^(ن-۲) + . . . + ع ن-۱ لا + ع ن

+ ی [ن ع. لا^(ن-۱) + (ن-۱) ع۱ لا^(ن-۲) + (ن-۲) ع۲ لا^(ن-۳) + . . . ع ن-۱]

+ ی^۲/۱×۲ [ن (ن-۱) ع. لا^(ن-۲) + (ن-۱) (ن-۲) ع۱ لا^(ن-۳) + . . . + ۲ ع ن-۲]

+ . . . .

+ ی^ر / |ر [ن (ن-۱) . . . (ن-ر+۱) ع. لا^(ن-ر) + (ن-۱)(ن-۲) (: (ن-ر) ع۱ لا^(ن-ر-۱) + . . }

+ . . .
+ ی^ن / |ن [|ن ع.]

اول سطر اس جملہ کی تو ج (لا) ہی اور دی کی امثال کو ہم جَ (لا) سے اور

امثال ی^۲/(۱×۲) کو جً (لا) سی اور امثال ی^۳/|۳ کو جً (لا) سی اور علی ہذالقیاس تعبیر کرو

یہہ طریقہ کتابت خالی از دقت اوسوقت نہوگا کہ بہت سی زیرین لگانی پڑینگے

پس عموماً ہم ی^ر/|ر کی امثال کو جَ (لا) سے تعبیر کرتے ہین اسی معلوم ہوا کہ

ج (لا+ی) = ج لا + ی جَ (لا) + ی^۲/(۱×۲) جً (لا) + ی^۳/|۳ جً (لا) + . . .

. . . + ی^ر/|ر جَ (لا) + . . . + ی^ن/|ن ج^ن (لا)

دیکھنی سی معلوم ہوتا ہی کہ ج (لا) و جَ (لا) و جً (لا) و جً (لا) . . . ج^ن (لا) اس قاعدہ عامہ کی مواقف تمام مربوط ہوتی ہین کہ جَ^(ر+۱) (لا) کے حاصل کرنی کی واسطی ہم ہریک رقم جَ (لا) کو لا کے قوت نمائین جو اوس قسم مین ہو ضرب دیتی ہین اور اوس قوت نمائین سی ایک گہٹا کر قوت نما بناتے ہین

(۱۱) فرض کرو کہ ج (لا) چوتہی درجہ کا ہے اور

ج (لا) = ع. لا^۴ + ع۱ لا^۳ + ع۲ لا^۲ + ع۳ لا + ع۴

تو جَ (لا) = ۴ع. لا^۳ + ۳ع۱ لا^۲ + ۲ع۲ لا + ع۳

جً (لا) = ۴×۳ ع. لا^۲ + ۳×۲ ع۱ لا + ۲ ع۲

جً (لا) = ۴×۳×۲ ع. لا + ۳×۲ ع۱

جً (لا) = ۴×۳×۲ ع.

ج (لا+ی) = ج (لا) + ی جَ (لا) + ی^۲/(۱×۲) جً (لا) + ی^۳/|۳ جً (لا) + ی^۴/|۴ جً (لا)

اگر ہم ع. و ع۱ و ع۲ و ع۳ و ع۴ اور لا کی وا عداد ے قیمتین مقرر کرین تو ج (لا) اور جَ (لا) ۰۰۰ کا حساب دفعہ ۵ کی ترکیب کے موافق ہو سکتا ہی جب ہم ہورنر صاحب کی ترکیب مساواتون کی حل کرنی کی بیان کرینگے تو اوسمین بتلاینگے کہ یہہ حساب کسطرح آسانی سی نہایت ضبط کی ساتھہ ہو سکتی ہین

(۱۲) اگر ہم سلسلہ ج (لا+ی) کا اغاز ی کی اعلی قوت سی کرین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{ج}(\text{لا}+\text{ی}) = \text{ع}_0\,\text{ی}^{\text{ن}} + (\text{ع}_1 + \text{ن}\,\text{ع}_0\,\text{لا})\,\text{ی}^{\text{ن}-1} + \left[\text{ع}_2 + (\text{ن}-1)\,\text{ع}_1\,\text{لا} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2\times1}\,\text{ع}_0\,\text{لا}^2\right]\text{ی}^{\text{ن}-2}$$

$$+\left[\text{ع}_3 + (\text{ن}-2)\,\text{ع}_2\,\text{لا} + \frac{(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{2\times1}\,\text{ع}_1\,\text{لا}^2 + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{\underline{|3}}\,\text{ع}_0\,\text{لا}^3\right]\text{ی}^{\text{ن}-3}$$

$$+\atop{+}\left[\text{ع}_{\text{ر}} + (\text{ن}-\text{ر}+1)\,\text{ع}_{\text{ر}-1}\,\text{لا} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)\cdots(\text{ن}-\text{ر}+1)}{\underline{|\text{ر}}}\,\text{ع}_0\,\text{لا}^{\text{ر}}\right]\text{ی}^{\text{ن}-\text{ر}}$$

$$+\cdots+\text{ج}(\text{لا})$$

جو صورت ہم نی ج (لا+ی) کی اوپر ابہی لکہی ہی اوسی یہہ صورت مستنبط ہو سکتی ہی یا ج (لا+ی) کے ہر رقم کو پہلا کر لکہین اور ی کی قواء متنازلہ کی ترتیب سی لکہین تو ہی مطلب حاصل ہو جایگا

(۱۳) جملہ جَ (لا) کو ج (لا) کا اول جملہ مشتقہ اور جً (لا) کو دوم جملہ مشتقہ اور علی ہذا القیاس کہتی ہین جب طالب علم اصول علم مفصولات سی واقف ہوگا تو اوسکو معلوم ہوگا کہ ہر جملہ مشتقہ اپنی ما قبل کی جملہ کا سر مفصول بلحاظ لا کی ہوتا ہی اور ج (لا+ی) کے واسطی جو جملہ قواء ی مین لکہا ہی وہ ایک مثال ٹیلر صاحب کے ضابطہ کی ہے

علاوہ برین یہہ امر بہی ملحوظ خاطر رہی کہ جً (لا) جسطرح جَ (لا) سی استخراج ہوتا ہے اوسیطرح جَ (لا) کا ج (لا) سی مستنبط ہوتا ہی پس جً (لا) اول جملہ مشتقہ جَ (لا) کا اور دوم جملہ مشتقہ جَ (لا) کا ہی اور علی ہذا القیاس اسی معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ گذشتہ کی

$$\text{جَ}(\text{لا}+\text{ی}) = \text{جَ}(\text{لا}) + \text{ی}\,\text{جً}(\text{لا}) + \frac{\text{ی}^2}{2\times1}\,\text{ج}''(\text{لا}) + \frac{\text{ی}^3}{\underline{|3}}\,\text{ج}'''(\text{لا}) + \cdots$$

$$+\cdots\frac{\text{ی}^{\text{ر}-1}}{\underline{|\text{ر}-1}}\,\text{ج}^{\text{ر}}(\text{لا})\cdots+\frac{\text{ی}^{\text{ن}-1}}{\underline{|\text{ن}-1}}\,\text{ج}^{\text{ن}}(\text{لا})$$

اور علی ہذا القیاس

$$\text{جً}(\text{لا}+\text{ی}) = \text{جً}(\text{لا}) + \text{ی}\,\text{ج}''(\text{لا}) + \frac{\text{ی}^2}{2\times1}\,\text{ج}(\text{لا}) + \cdots$$

$$\cdots \frac{ر (ر-۲)}{ر-۲}ج(لا) + \cdots + \frac{ن-۲}{ن-۲}ج^{ن}(لا)$$

اور علی ہذا القیاس

(۱۴) لا کی کسی جملہ صحیحہ ناطقہ میں جو موافق قواء متنازلہ لا کی لکھا جاے ہر یک رقم کو جو اوسمین واقع ہوتی ہو لا کو کافی بڑہا کر ایسا بنا سکتی ہین کہ وہ اپنی سب مابعد کی رقموں کی مجموعہ سی جتنی گنی ہم چاہین ہو جای اور ہر یک رقم کو لا کو کافی گہٹا کر ایسا بنا سکتی ہین کہ وہ اپنی سب ماقبل کی رقموں کی مجموعہ سی جتنی گنی ہم چاہین ہو جاے

فرض کرو $ع_{.} لا^{ن} + ع_{۱} لا^{ن-۱} + ع_{۲} لا^{ن-۲} + \cdots + ع_{ن-۲} لا^{۲} + ع_{ن-۱} لا + ع_{ن}$

ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہو اور فرض کرو کہ روین رقم $ع_{ر-۱} لا^{ن-ر+۱}$ واقع ہوتی ہے

یعنی $ع_{ر-۱}$ صفر نہین ہی اور امثال $ع_{ر}$ و $ع_{ر+۱}$ ... $ع_{ن}$ مین جو سب سے بڑا ہے

اوسکی عددی قیمت ق ہے روین رقم کی مابعد رقموں کا مجموعہ

$ق (لا^{ن-ر} + لا^{ن-ر-۱} + \cdots + لا + ۱)$ یعنی $ق \frac{لا^{ن-ر+۱} - ۱}{لا - ۱}$ سے زیادہ نہین ہو سکتا

اور روین رقم کی نسبت اس مجموعہ کی ساتھہ $\frac{ع_{ر-۱} (لا-۱) لا^{ن-ر+۱}}{ق (لا^{ن-ر+۱} - ۱)}$

یعنی $\frac{ع_{ر-۱} (لا-۱)}{ق - ق لا^{-(ن-ر+۱)}}$ اب لا کو کافی بڑا فرض کرنی سی شمار کنندہ کو جتنا چاہین ہم بڑا کر سکتی ہین اور نسب نما کو برابر ق کی کر سکتی ہین اسلئی اس نسبت کو جتنا چاہین بڑہا لین

پس اسی دعوی کا پہلا جزو ثابت ہوا — اب دوسرے جزو کے ثابت کرنے کےلئے فرض کرو کہ $لا = \frac{۱}{ی}$ تو یہہ سلسلہ حاصل ہو گا کہ

$$\frac{۱}{ی^{ن}} \left\{ ع_{.} + ع_{۱} ی + ع_{۲} ی^{۲} + \cdots + ع_{ن-۱} ی^{ن-۱} + ع_{ن} ی^{ن} \right\}$$

اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ لا کو کافی چہوٹا فرض کرکی یعنی ی کو کافی بڑا فرض کرکی کسی رقم $ع_{ر} ی^{ر}$ کو جو نفس الامر مین واقع ہوتی ہو نسبت مین اپنی سارے ارقام ماقبل کے $ع_{.} + ع_{۱} ی + \cdots ع_{ن-۱} ی^{ر-۱}$

کی مجموعہ کی ساتھہ جتنا چاہین بڑہاوین اور یہہ اول ثابت ہو چکا ہی اسی دوسرا دعوی کا جزو ثابت ہوا

(۱۵) مسائل معادلات مین جو اول سوال ذہن مین آتا ہی وہ یہہ ہی کہ ہر مساوات ایک قیمت رکہتی ہی یا نہین

اب ہم بعض سیدہی سادہی مقدمات لکہینگے جسی یہہ ثابت ہوگا کہ خاص صورتون مین ایک قیمت کا وجود ہوتاہی ایک مسئلہ کی ضرورت پڑتی ہی جسکو بدیہی جانکر تسلیم کرلیا کرتی ہین مگر ہم اوسکو دفعہ ذیل مین ثابت کرتے ہین

(۱۶) فرض کرو کہ ج (لا) ایک جملہ صحیح ناطقہ جملہ لا کا ہو اور اوسکی قیمتین ج (ا) اور ج (ب) موافق لا کی ا ا و ر ب کی قیمتون کی ہون یعنی ج (لا) مین جب لا کی جگہ ا لکہین تو ج (لا) کی قیمت ج (ا) حاصل ہو اور علی ہذا القیاس ج (ب) تو لا جب اسی بدل کر ب بنیگا تو ج (لا) ج (ا) سی بدل کر ج (ب) بنیگا اور ج (ا) اور ج (ب) کی سب درمیانی قیمتون پر اوسکی نوبت پہونچیگی اب فرض کرو کہ لا کی قیمت س لگائی جائی اور اسکی موافق ج (لا) کی قیمت ج (س) ہو اب لا کی واسطے ایک اور قیمت س + صہ مقرر کرو تو صہ کو کافی چہوٹا فرض کرنی سی ہم ج (س + صہ) اور ج (س) کے تفاوت کو جتنا چاہین کم کرسکتی ہین اسواسطے کہ

$$\text{ج}(\text{س}+\text{صہ}) = \text{ج}(\text{س}) + \text{صہ}\,\text{جَ}(\text{س}) + \frac{\text{صہ}^{2}}{1\times 2}\,\text{جً}(\text{س}) + \cdots + \frac{\text{صہ}^{\text{ن}-1}}{|\text{ن}-1}\,\text{ج}^{\text{ن}-1}(\text{س}) + \frac{\text{صہ}^{\text{ن}}}{|\text{ن}}\,\text{ج}(\text{س})$$

اب پہر بموجب دفعہ ۱۴ کی صہ کو کافی چہوٹا فرض کرکے اول رقم سلسلہ صہ جَ (س) اور $\frac{\text{صہ}^2}{1\times 2}$ جً (س) اور $\frac{\text{صہ}^3}{|3}$ جً (س) . . . کو جو معدوم نہین ہوتی ایسا بنا سکتی ہین کہ وہ اپنی کل مابعد کی رقموں کے مجموعہ سی جتنی گنی ہم چاہین ہوجاے اور صہ کو کافی چہوٹا فرض کرنی سی یہہ رقم خود جتنی چہوٹی ہم چاہین بن سکتی ہی اسیواسطی ج (س + صہ) — ج (س) کو جتنا چاہین صہ کو چہوٹا فرض کرکی بنا سکتی ہین اسی ثابت ہوتا ہی کہ لا جسطرح بتدریج بدلتا ہی اوسیطرح ج (لا) بتدریج بدلتا ہے اگر ج (لا) کی کوئی قیمت موافق قیمت مشخصہ لا کی ہو تو اوسکی دوسری قیمت پہلی قیمت کی قریب جتنی ہم چاہین موافق لا کی دوسری قیمت کی جو پہلی قیمت مشخصہ کے کافی قریب ہو لی سکتی ہین اسی معلوم ہوا کہ جب لا اسی ب تک بدلتا ہی تو جملہ ج (لا) قیمت ج (ا) سی قیمت ج (ب) تک نوبت بنوبت بدلتا ہی اور اوسکی اندر کہین گسستگی نہین واقع ہوتی اسواسطی کہ اگر یہہ کہا جاے کہ اوسکی اندر گسستگی واقع ہوتی ہے تو اسکی یہہ معنی ہین کہ ہم لا کی ایسی قیمت نہین مقرر کرسکتی کہ وہ پہلی قیمت کی قریب ہماری مرضی کی موافق ہو

(۱۷) دفعہ گذشتہ مین ہم نی یہہ تو نہین بیان کیا کہ ج (لا) ہمیشہ ج (ا) سی ج (ب) تک بڑہتا ہی یا ہمیشہ ج (ا) سی ج (ب) تک گہٹتا ہی اسلئی مختلف صورتین ہونگی کبہی زیادہ ہوگا کبہی کم ہوگا لیکن یہہ ہم نی بیان کیا ہی کہ وہ نوبتا بہ نوبت بتدریج قیمت ج (ا) سی قیمت ج (ب) تک تبدیل ہوتا ہی اور یہہ تبدل یکایک نہین ہوتا بلکہ نوبت بہ نوبت ہوتا ہی یہہ ایک بڑا مقدمہ ہی اور اگر طالب علم اوسپر غور کریگا تو اوسکو بدیہات سی معلوم ہوگا کیونکہ یہہ بات ظاہر ہی کہ لا کی ہر متناہی قیمت کی موافق ج (لا) کی بہی متناہی قیمت ہوگی اور یہہ ہم نی ثابت کردیا کہ اگر لا بے نہایت چہوٹی تبدیلی کیجائی تو ج (لا) مین بہی بی نہایت چہوٹی تبدیلی ہوگی پس اس سبب سے ج (لا) کے متواتر قیمتون مین جو درجہ بدرجہ ہوتی ہین کہین گسستگی اور شکستگی نہین واقع ہوگی

(۱۸) طالب علم اگر ہندسہ الجبری سی واقف ہوگا تو اوسکو یہہ مضمون اوسپر کا بڑا دلچسپ معلوم ہوگا وہ خطوط منحنی جو جملون کو تعبیر کرین بنائیگا اور اون پر غور اسطرح کریگا کہ ج (لا) کو یہ سی تعبیر کریگا پس یہ = ج (لا) کو مساوات خط منحنی کی خیال کریگا اور پہر اس خط منحنی کے اوس حصہ کو جو درمیان لا = ا اور لا = ب کی واقع ہے فرض کریگا پہر اسی اوس کی ذہن مین یہہ عمدہ تصور پیدا ہوگا کہ ج (لا) کی واسطی جو قیمتین مابین ج (ا) اور ج (ب) کی درمیان تشخیص کیجائین اونمین ضرور ہی کہ تواتر ہو اور کہین اونمین گسستگی نہ واقع ہو

اس بات پر بہی لحاظ رہی کہ ا اور ب اور ج (ا) اور ج (ب) کی ساتہہ نسبت ہونی کی قید نہین ہے ج (ا) اور ج (ب) کی مابینی قیمتون کی معنی علم جبر مقابلہ کی موافق لئی گئی ہین یعنی ہر مقداری کو ج (ا) اور ج (ب) کی مقدار مابینی کہینگے اگر ی - ج (ا) اور ج (ب) - ی کے ایک سے علامت ہو

(۱۹) اگر لا کی جملہ صحیحہ ناطقہ ج (لا) مین لا کی جگہ دو عدد رکہی جائین اور اونسی قیمتین ج (لا) کی مختلف العلامت حاصل ہون تو ضرور ہی کہ کم از کم ایک قیمت مساوات ج (لا) = ۰ کی لا کی اون قیمتون کی درمیان واقع ہو

فرض کرو کہ ا اور ب وہ قیمتین ہین تو ج (ا) اور ج (ب) مختلف العلامت بموجب فرض کے ہین

اور بموجب دفعہ ۱۶ کی جب لا بتدریج اسی بات تک بدلتا ہی تو جملہ ج (لا) بغیر کسی گسستگی قیمت کی
ج (ا) سی ج (ب) تک بدلتا ہی لیکن اس سبب سے کہ ج (ا) اور ج (ب) مختلف العلامت ہیں
تو قیمت صفر کی اونکی درمیان واقع ہوگی اسلیے ضروری ہی کہ موافق کسی قیمت کی جو ا اور ب کے درمیان
واقع ہو ج (لا) برابر صفر کی ہو اور اسکی یہی معنی ہیں کہ مساوات ج (لا) = ۰
کی ایک قیمت درمیان ا اور ب کے واقع ہوتی ہے

(۲۰) مساوات طاق درجہ کی ضرور ایک اصلی قیمت رکھتی ہے

فرض کرو کہ مساوات ج (لا) = ۰ سے تعبیر ہو یہاں

$$ج\ (لا) = ع_{.}\, لا^{ن} + ع_{۱}\, لا^{ن-۱} + \cdots + ع_{ن-۱}\, لا + ع_{ن}$$

اسمیں ن ایک طاق عدد ہی
جب لا کافی بڑا ہو تو بموجب دفعہ ۱۴ کی اول رقم ج (لا) کی یعنی $ع_{.}\, لا^{ن}$ باقی ارقام کی مجموعہ سی بڑا ہوگا
اسواسطے ج (لا) کی علامت وہی ہوگی جو $ع_{.}\, لا^{ن}$ کی علامت ہی پس لا کو کافی بڑا مقرر کرنے سے
اگر لا مثبت ہو تو ج (لا) کی وہی علامت ہوگی جو ع. کی علامت ہی اور اگر لا منفی ہوگا تو
ج (لا) کی علامت مخالف ع. کی علامت کی ہوگی پس اس سبب سے کہ لا کی ایک مناسب مثبت قیمت
جب بدل کر ایک مناسب منفی قیمت ہو جاتی ہی تو علامت ج (لا) کی بدلتی ہی ضرور ہی کہ ایک قیمت
درمیانی لا کی ایسی ہو کہ ج (لا) کو معدوم کردی اسکی یہہ معنی ہیں کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک اصلی قیمت ہے
اب ہم یہہ دریافت کر سکتی ہیں کہ یہہ قیمت مثبت ہوگی یا منفی اسواسطی کہ جب لا کی واسطی صفر رکھیں
تو ج (لا) کی علامت وہی ہوگی جو $ع_{ن}$ کی علامت ہی پس اگر ع. اور $ع_{ن}$ کی ایک ہی علامت ہو
تو $\frac{ع_{ن}}{ع_{.}}$ مثبت ہی تو مساوات ج (لا) = ۰ کی یقینی ایک منفی قیمت ہوگی اور اگر ع. اور $ع_{ن}$
کی مختلف علامتیں ہوں تو $\frac{ع_{ن}}{ع_{.}}$ ایک مقدار منفی ہوگی اسواسطی یقینی ایک مثبت قیمت مساوات
ج (لا) = ۰ کی ہوگی پس اگر مساوات طاق درجہ کی ہو اور سب سے لا کی اعلی قوت کی امثال ہی :
مساوات کو تقسیم کرکی سادی صورت اوسکی بنائیں تو ایک اصلی قیمت مساوات ہوگی جسکی

علامت متضاد اخر رقم کے علامت کے ہوگی

(۲۱) ایک مساوات زوج درجہ کی ہو اور صورت سادہ رکھتی ہو اور اوسکی اخر رقم منفی ہو تو اوسکی دو اصلی قیمتین مختلف العلامت ضرور ہونگین

فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ مساوات ہو تو جب لا صفر ہوگا تو بموجب فرض کے ج (لا) منفی ہوگا جب لا کافی بڑا ہو تو ج (لا) مثبت ہوگا خواہ لا مثبت ہو یا منفی پس کوئی منفی قیمت لا کی ایسی ہی کہ ج (لا) کو معدوم کرتی ہی اور نیز کوئی مثبت قیمت بھی ایسی ہے کہ ج (لا) کو معدوم کرتی ہی یعنی مساوات ج (لا) = ۰ کی یقینی ایک مثبت قیمت اور ایک منفی قیمت ہی

(۲۲) اگر جملہ صحیحہ ناطقہ ج (لا) مین ارقام کی ایک صنف کی امثال کی یکسان علامت ہو اور اونکی اگلی کے ارقام کی صنف کی امثال کی علامت پہلی علامت کی متضاد ہو تو مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک مثبت قیمت ہوگی اور صرف ایک ہی مثبت قیمت ہوگی

بموجب دفعات ۲۰ اور ۲۱ کی مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک مثبت قیمت ہوگی اب یہہ ثابت کرینگے کہ صرف ایک ہی مثبت قیمت ہوگی

فرض کرو کہ $ج(لا) = ع_0 لا^{ن} + ع_1 لا^{ن-1} + ع_2 لا^{ن-2} + \cdots + ع_{ن-1} لا + ع_ن$

فرض کرو کہ امثال $ع_0$ اور $ع_1$ … $ع_ر$ سب کے مثبت ہین اور باقی امثال منفی ہین

فرض کرو کہ $ع_{ر+1} = -ع'_{ر+1}$ اور $ع_{ر+2} = -ع'_{ر+2}$ … $ع_ن = -ع'_ن$

پس ج (لا) کو ہم اسطرح لکھہ سکتی ہین کہ

$$ج(لا) = لا^{ن-ر}\left[ع_0 لا^{ر} + ع_1 لا^{ر-1} + ع_2 لا^{ر-2} + \cdots + ع_ر - \frac{ع'_{ر+1}}{لا} - \frac{ع'_{ر+2}}{لا^2} - \cdots - \frac{ع'_ن}{لا^{ن-ر}}\right]$$

جملہ $ع_0 لا^{ر} + ع_1 لا^{ر-1} + ع_2 لا^{ر-2} + \cdots + ع_ر$ ایسا ہی بڑہتا ہے جیسا کہ لا بڑہتا ہے مگر جس حالت مین کہ ر = ۰ کے تو اوس کی قیمت مستقل ہوجاتی ہے اور جملہ $\frac{ع'_{ر+1}}{لا} + \frac{ع'_{ر+2}}{لا^2} + \cdots + \frac{ع'_ن}{لا^{ن-ر}}$ ایسا گھٹتا ہے جیسا کہ لا بڑہتا ہے

پس جب لا صفر سی اوپر بڑہتا ہی تو دونو جملہ سوا ایک دفعہ کی آپسمین برابر نہین ہوسکتی اسکی یہی معنی ہین کہ

ج (لا) = ۰ کے صرف ایک ہی مثبت قیمت ہے

(۲۳) کسی طرح متشابہ نہ لگی اسلئی ہم اخرتین دفعات کے نتایج کو نہایت صفائی اور درستی کے ساتھہ لکھتی ہین

دفعہ ۲۰ مین جس مساوات کا ذکر ہی اوسکی واسطی یہہ ثابت ہوا ہی کہ اوسکی کم از کم ایک اصلی قیمت ہوتی ہے مگر یہہ نہین ثابت ہوا کہ وہ صرف ایک ہی ہوتی ہی دفعہ ۲۱ مین جس مساوات کا بیان ہوا ہی اوسکے واسطی یہہ ثابت ہوا ہی کہ اوسکی کم از کم دو اصلی قیمتین ہونگین مگر یہہ نہین ثابت کیا کہ صرف دو ہی اصلی قیمتین ہونگین دفعہ ۲۲ مین جس مساوات کا ذکر ہی اوسمین ثابت ہوا ہی کہ ایک مثبت قیمت اوسکی ہوتی ہی اور یہہ بھی ثابت ہوا ہی کہ صرف ایک ہی قیمت ہوتی ہی مگر یہہ نہین ثابت ہوا کہ کوئی اوسکی منفی قیمت نہین ہوتی

(۲۴) دفعات ۲۰ و ۲۱ و ۲۲ مین جو مقدمات ثابت ہوئی ہین اونمین خاص صورتون کے اندر قیمتون کا وجود موقوف اس امر پر رکہا گیا ہی کہ ہم اس بات کو ثابت کرین کہ ج (لا) کی ایک دفعہ یا کئی دفعہ علامت بدلتی ہی اگر برخلاف اسکے ایسی صورت ہو کہ خاص سلک قیمتون کی ایسی ہو کہ ہم یہہ ثابت کردین کہ ج (لا) کی علامت موافق اوس سلک کے نہین تبدیل ہوتی تو کوئی قیمت مساوات ج (لا) = ۰ کی اوس سلک مین سے لا کی واسطی نہ ہوگی

اب اس دعوی کی ظاہر صورتین ذیل مین لکھتی ہین

(۱) اگر امثال ج (لا) کی سب مثبت ہون تو مساوات ج (لا) = ۰ کی کوئی مثبت قیمت نہوگی

(۲) اگر ج (لا) مین لا کی زوج قوا کی امثال یکسان علامت رکہین اور لا کی طاق قوتون کی سب امثال پہلی علامت کی متضاد علامت رکہین تو مساوات ج (لا) = ۰ کی کوئی منفی قیمت نہ ہوگی

(۳) اگر لا کی صرف زوج قوا سی ج (لا) مشتق ہو اور تمام امثال کی یکسان علامت ہو تو مساوات ج (لا) = ۰ کی کوئی اصلی قیمت نہین ہوگی

(۴) اگر صرف لا کی طاق قوا سی ج (لا) مشتق ہو اور تمام امثال کی یکسان علامت ہو تو مساوات ج (لا) = ۰ کی کوئی اصلی قیمت نہین ہوگی الا اوس صورت مین کہ لا = ۰

ہم نی دو اخر صورتون مین یہہ لکھا ہی کہ مساوات کی اصلی قیمت کوئی نہین ہوگی مگر یہہ ہم نے پہلی کہا کہ

کوئی قیمت اوسکی نہین ہوگی اسواسطی کہ اس بات کو ہم جبر مقابلہ کی چھبیسوین باب مین ظاہر کرینگی کہ
باتفاق جمہور مساوات بعض صورتون مین ایسی ہوتی ہی کہ اوسکی قیمت تخیلی ہوتی ہے

باب دوم وجود قیمت کی بیان مین

(۲۵) ہم ثابت کرینگے کہ ہریک مساوات صحیح ناطقہ کی ایک قیمت ہوتی ہی خواہ وہ اصلی ہو خواہ خیالی
یعنی اس صورت ا + ب $\sqrt{-1}$ کی اسمین ا اور ب اصلی ہین ایسی جملہ ا + ب $\sqrt{-1}$
کو جسمین ا اور ب اصلی ہون جملہ خیالی کہتی ہین اسکی یہہ معنی ہین کہ جب ہم لفظ خیالی کا کسی جملہ کی ساتھہ استعمال مین
لائین تو اوسی مراد یہہ ہوتی ہی کہ وہ جملہ ا + ب $\sqrt{-1}$ کی صورت کا ہی اور اوسمین ا اور ب اصلی ہین

(۲۶) طالب علم اس بات کو جانتی ہین کہ بعض باتین باتفاق جمہور ایسی مقرر ہوئی ہین کہ جنکی سبب سے
ہم تحقیقات جبریہ مین خیالی جملون سے بحث کرسکتی ہین اور اونکی باب مین بعض مسائل قائم کرسکتی ہین
مثلاً ا² + ب² کی جذر کی مثبت قیمت قالب ہریک جملہ ا + ب $\sqrt{-1}$ اور ا - ب $\sqrt{-1}$ کا کہلاتا ہے
اور اس حدود کی استعانت سی یہہ ہم ثابت کرسکتی ہین کہ دو خیالی جملون کی حاصل ضرب کا قالب
ان دو جملون کی قالبون کا حاصل ضرب ہوتا ہی
اسواسطی کہ حاصل ضرب ا + ب $\sqrt{-1}$ اور اَ + بَ $\sqrt{-1}$ کا
ا اَ - ب بَ + (ا بَ + اَ ب) $\sqrt{-1}$ اور قالب اسکا مثبت قیمت جذر (ا اَ - ب بَ)² + (ا بَ + اَ ب)²
کی یعنی (ا² + ب²) (اَ² + بَ²) کی ہی اور اسکی یہی معنی ہین کہ دو معلوم جملون کے قالبون
کا حاصل ضرب یہہ قالب ہے
اور نیز جملہ ا + ب $\sqrt{-1}$ اوس حالت مین معدوم قرار دیا گیا ہی کہ ا اور ب معدوم
ہوجائین پس اب یہہ ثابت ہوا کہ اگر حاصل ضرب دو خیالی جملون کا معدوم ہوتا ہے تو ایک جملہ
کا قالب بہی معدوم ہوجاتا ہی اور ایسی ہی اگر حاصل ضرب دو یا زیادہ خیالی جملون کا معدوم ہوتا ہے
تو خود ایک جملہ بہی معدوم ہوتا ہی اور اگر ایک خود جملہ معدوم ہوجاتا ہے تو اوسکا حاصل ضرب بہی معدوم ہوجاتا ہے

(۲۷) جن طالب علمون نے خیالی جملون پر توجہ نہ کی ہو اب وہ بڑے جبر مقابلہ کی چھبیسوین باب کو دیکھیں

اب ایک بات بہت مشکل ہم ثابت کرتی ہین کہ ہر ایک مساوات ایک قیمت رکہتی ہی خواہ وہ قیمت اصلی ہو یا خیالی ہو + یہہ بہتر معلوم ہوتا ہی کہ بالفعل طالب علم اس امر کو یون ہی تسلیم کر لی اور اگی کام چلائی اور اس باب کو اگی چہوڑ دی اور یہہ جب سارا کچہہ اس رسالہ کو پڑہ لی تو پہر اوسکو مطالعہ کری اول اس مسئلہ کے سمجہنی مین دقت نہ اٹہائی

(۲۸) اول ہم یہہ ثابت کرتی ہین کہ چارون معادلات ذیل مین ایک ایک قیمت وجود رکہتی ہے خواہ وہ قیمت اصلی ہو یا خیالی

$$\text{لا}^{\text{ن}} = ۱ \qquad \text{لا}^{\text{ن}} = -۱ \qquad \text{لا}^{\text{ن}} = +\sqrt{-۱} \qquad \text{لا}^{\text{ن}} = -\sqrt{-۱}$$

(۱) $\text{لا}^{\text{ن}} = ۱$ مین ظاہر ہے کہ $\text{لا} = ۱$ ایک قیمت مساوات کی ہے

(۲) $\text{لا}^{\text{ن}} = -۱$ اگر ن طاق عدد ہو تو ظاہر ہی کہ $\text{لا} = -۱$ اک ایک قیمت مساوات کی ہوگی اگر ن زوج ہو تو اوسکو برابر ۲م کی فرض کرو تو یہہ ثابت کرتا ہوگا کہ مساوات $\text{لا}^{۲\text{م}} = -۱$ کا ایک حل ہی اور اسکی معنی یہی ہین کہ ہم یہہ ثابت کر دین کہ مساوات $\text{لا}^{\text{م}} = \pm\sqrt{-۱}$ کا ایک حل ہی اسلئی اسکا حل یہی باقی دو ذیل کی مساواتون کی حل مین داخل ہو گیا

(۳) $\text{لا}^{\text{ن}} = +\sqrt{-۱}$ اگر ن طاق ہو تو اوسکی دو صورتین ۴م+۱ اور ۴م+۳ کی ہونگین اول صورت مین $+\sqrt{-۱}$ ایک قیمت ہی اسلئی کہ $(+\sqrt{-۱})^{۴\text{م}+۱} = +\sqrt{-۱}$ اور دوسری صورت مین $-\sqrt{-۱}$ ایک قیمت ہوگی کیونکہ $(-\sqrt{-۱})^{۴\text{م}+۳} = +\sqrt{-۱}$

اگر ن ایک جفت عدد ہی تو فرض کرو کہ وہ م ع کی برابر ہی اسمین م ایک طاق عدد ہی اور ع کوئی سی قوت ۲ کی مثلاً $۲^{\text{ق}}$ ہی $\text{ی} = \text{لا}^{\text{م}}$ کی رکہو تو مساوات $\text{لا}^{\text{م ع}} = +\sqrt{-۱}$ کو اسطرح لکہہ سکتے ہین کہ $\text{ی}^{\text{ع}} = +\sqrt{-۱}$ اور ابہی ہم ثابت کر آئی ہین کہ $+\sqrt{-۱}$ ایک مناسب قیمت ی کی ہی اگر م کی صورت ۴ر+۱ ہو اور $-\sqrt{-۱}$ ایک مناسب قیمت ی کی ہے اگر م کی صورت ۴ر+۳ کی ہو اب ہم کو لا کی قیمت ایسی دریافت کرنی باقی رہی کہ جسمی شرائط $\text{لا}^{\text{ع}} = +\sqrt{-۱}$ اور $\text{لا}^{\text{ع}} = -\sqrt{-۱}$ کی پوری ہون اسمین $\text{ع} = ۲^{\text{ق}}$

قیمت مطلوب اسکی جبر مقابلہ کی ایک معمولی عمل سے اسطرح حاصل ہو سکتی ہی کہ جذر $+\sqrt{-1}$ کا لو یا $-\sqrt{-1}$ کا نکالو اسی ایک جملہ سہ + صہ $\sqrt{-1}$ حاصل ہوگا جسمین سہ او صہ اصلی ہونگے اب جذر سہ + صہ $\sqrt{-1}$ کا لو تو اسی جذر اسکے متماثل ایک جملہ ہوگا اور علی ہذا القیاس جبر مقابلہ کا پچیسواں باب دیکھو جب ہم ق دفعہ جذر نکالین تو ایک جملہ ا + ب $\sqrt{-1}$ حاصل ہوگا اور (ا + ب $\sqrt{-1}$)^{ن} = $+\sqrt{-1}$ یا = $-\sqrt{-1}$

(۴) لا^{ن} = $-\sqrt{-1}$ پر مثل (۳) کی عمل کرو اگر ن طاق عدد ہو اور ۴م + ۱ کی صورت کا ہو تو $-\sqrt{-1}$ قیمت ہوگی اور جب ۴م + ۳ کی صورت کا ہو تو $+\sqrt{-1}$ ایک قیمت ہوگی اور اگر ن جفت قوت ہو تو اوسکو برابر ۲^{م} ع کی فرض کرو جسمین م طاق عدد ہی اور ع = ۲^{ق} اور اسکا عمل موافق سابق کرو

(۲۹) ہر ایک مساوات صحیح ناطقہ کی ایک اصلی یا خیالی قیمت ہوتی ہے

فرض کرو کہ ج (لا) = ع. لا^{ن} + ع۱ لا$^{ن-۱}$ + ع۲ لا$^{ن-۲}$ + . . . + ع ن-۲ لا^{۲} + ع ن-۱ لا + ع ن اور مثال ع. ع۱ ع۲ . . . ع ن-۲ ع ن-۱ ع ن کیا اصلی ہیں یا خیالی ہیں اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک قیمت کیا اصلی یا خیالی ہوگی اگر بجای لا کی کوئی جملہ خیالی ج (لا) مین مندرج کرین تو حاصل لو + مو $\sqrt{-1}$ کی صورت کا حاصل ہوگا اور اسمین لو اور مو اصلی مقادیر ہونگین اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہے کہ ایک جملہ خیالی ایسا ہی کہ وہ لو = ۰ اور مو = ۰ کی کرتا ہی اور اس بات کو ہم اسطرح ثابت کرتے ہین کہ چونکہ لو^{۲} + مو^{۲} ہمیشہ ایک اصلی مثبت مقدار ہی اگر وہ صفر نہ ہوگی تو کوئی قیمت ایسی اوسکی ضرور ہونی چاہئے کہ وہ کسی اور قیمت سے بڑی نہ ہو یعنی کوئی ایسی قیمت ہونی چاہی کہ وہ گھٹ نہ سکی لیکن اب ہم یہہ ثابت کرینگے کہ لو^{۲} + مو^{۲} کی کوئی قیمت سوا صفر کی ہو تو ہم اوس جملہ مین کہ لا کی واسطے رکھا جاے ایک مناسب تغیر پیدا کر کے اوس قیمت کو گھٹا سکتے ہین اور اسسے یہہ نتیجہ نکالتے ہین کہ لو^{۲} + مو^{۲} قابلیت صفر ہونی کی رکھتا ہی یعنی لو اور مو دونو ایک ہی وقت معدوم ہو جاتے ہین

فرض کرو کہ لا کی ایک خاص قیمت یعنی ا + ب $\sqrt{-1}$ مقرر کی گئی ہی اور اوسکی مندرج کرنے سے ج (لا) کا ع + ق $\sqrt{-1}$ کی صورت کا ہو جاتا ہی اسمین ع اور ق دونو صفر نہین ہین اب

ا + ب$\sqrt{-1}$ + هه کو لا کی جگه ج (لا) مین رکهو اب قیمت ج (لا) کی جو صورت پیدا هوگی وہ اس طرح دریافت هوگی

اول ج (لا + هه) کو قواء هه مین پهیلائین اور پهر ا + ب$\sqrt{-1}$ کو بجای لا کی رکهین یعنی فرض کرو

ج (لا + هه) = لا + هه لاَ + $\frac{هه^2}{2}$ لاً + ۰ ۰ ۰ + $\frac{هه^ن}{|ن}$ ع. ن

اسمین لا اور لاَ اور لاً ۰ ۰ ۰ جمله لا کے هین دفعه ۱۰ کو دیکهو

لا کی جگه ا + ب$\sqrt{-1}$ رکهو تو لا کی صورت عر + قر$\sqrt{-1}$ کی هو جائیگی

بعض امثال لاَ اور لاً ۰ ۰ کی لا کی اس قیمت سی فنا هو جائیگی مگر وه سب کے سب معدوم

لا کی اس قیمت سی نهین هو سکتی کیونکه آخر امثال $\frac{هه^ن}{|ن}$ کا ع. ن هے

فرض کرو که هه^م سب سے ادنی درجه کی قوت هه کی هی جسکی امثال فنا نهین هوتی اور هه^م کے

امثال کو مر + صر$\sqrt{-1}$ سی تعبیر کرو اسمین مر اور صر دونو صفر نهین هین پس جب ا + ب$\sqrt{-1}$ + هه

لا کی جگه رکها جای تو ج (لا) یهه هو جاتا هے که

عر + قر$\sqrt{-1}$ + (مر + صر$\sqrt{-1}$) هه^م + ۰ ۰ ۰

جن قوتون کو لکها نهین اونمین هه کی قوا بڑی هه^م ملتف هین اسکو عرَ + قرَ$\sqrt{-1}$ سے تعبیر کرو

فرض کرو که هه = بدطر اسمین بد ایک اصلی مثبت مقدار هی بموجب دفعه ۲۸ کی یهه همارے اختیار مین هے که

طر کو ایسا مقرر کرین که طر^م کیا +۱ هو یا -۱ پس اسی یهه هم حاصل کر سکتے هین که

عرَ + قرَ$\sqrt{-1}$ = عر + قر$\sqrt{-1}$ ± (مر + صر$\sqrt{-1}$) بد^م + ۰ ۰ ۰

پس عرَ = عر ± مر بد^م + ۰ ۰ ۰

قرَ = قر ± صر بد^م + ۰ ۰ ۰

عرَ^{2} + قرَ^{2} = عر^2 + قر^2 ± ۲ (عر مر + قر صر) بد^م + ۰ ۰ ۰

جو رقمین که یهان لکهی نهین اونمین بد^م سے بڑی قوا بد کے ملتف هونگے

اب بموجب دفعه ۱۴ کی بد کو هم ایسا چهوٹا مقرر کر سکتی هین که عرَ^{2} + قرَ^{2} کے قیمت مین جو تمام

رقمین بد سے ملتف هون اونکی وهی علامت هو جو ± ۲ (عر مر + قر صر) بد^م کی علامت هی

بشرطیکہ عرمر + قرصر صفر نہ ہو

اب ہم اول یہہ فرض کرتی ہین کہ عرمر + قرصر صفر نہین ہی تو علامت عر² + قر² − عرَ² − قرَ²
وہی علامت ہے جو علامت ± ۲ (عرمر + قرصر) بدم کی جسمین لا کافی چھوٹا مقرر کیا گیا ہے
اور ہم اس بات کو یقینی جان سکتی ہین کہ یہہ علامت منفی موجب اس فرض کے ہوگی کہ
اگر عرمر + قرصر مثبت ہو تو طرا ہو −۱ اور اگر عرمر + قرصر منفی ہو تو طرا ہو +۱
پس اسیواسطی عرَ² + قرَ² کو چھوٹا عر² + قر² سے کر سکتی ہین
دوم یہہ فرض کرو کہ عرمر + قرصر صفر ہی تو بجای طرا = ± اکے
فرض کرنی کی طرا = ± ہا √−۱ فرض کرو اور پہر موافق سابق کی عمل کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

عرَ + قرَ √−۱ = عر + قر √−۱ ± (مر + صر √−۱) بد ہا √−۱ + . . .

پس عرَ = عر ∓ صر بدا + . . .

قرَ = قر ± مر بدم + ...

اور عرَ² + قرَ² = عر² + قر² ± ۲ (قرمر − عرصر) بدا + . . .

اسمین ارقام جنمین بدا سے بد کے اعلی قوتین ملتف ہوت نہین لکہی ہین

اب (عرمر + قرصر)² + (قرمر − عرصر)² = (عر² + قر²) (مر² + صر²)

اور یہہ برابر صفر کی نہین ہوسکتا اسواسطی کہ عر² + قر² بموجب فرض کے برابر صفر کی نہین ہے اور مر² + صر²
ثابت ہوچکا ہی کہ سوار صفر کے ہی پس اس سبب سے کہ عرمر + قرصر صفر ہے
قرمر − عرصر صفر نہین ہی اسیواسطے علامت عر² + قر² − عرَ² − قرَ² کے علامت وہی ہوگی جو
علامت ± ۲ (قرمر − عرصر) بدا کی ہی جسمین بد کافی چھوٹا فرض کیا گیا ہی اور ہم اس
بات کو یقینی جان سکتی ہین کہ یہہ علامت منفی بموجب اس فرض کی ہوگی کہ اگر قرمر − عرصر مثبت ہو تو
طرا ہو − √−۱ اور اگر قرمر − عرصر منفی ہو تو طرا ہو − √−۱ یا + √−۱ ہو اسواسطے ہم
عرَ² + قرَ² کو چھوٹا عر² + قر² سے فرض کر سکتے ہین

پس ہم نی اسطرح یہہ ثابت کر دیا کہ $\text{لو}^2 + \text{مو}^2$ کی قیمت جب مختلف صفر سی ہو تو ہم اوس قیمت کو اسطرح گھٹا سکتی ہین کہ لا کی بجای جو جملہ رکھا جاے اوسمین ایک مناسب تغیر کر دین یعنی $\text{لو}^2 + \text{مو}^2$ قابل اسکے نہین ہی کہ کوئی مثبت قیمت اوسکی ایسی ہو کہ وہ گھٹ نہ سکی جو کچھہ ہم نی یہان کیا اوس سے معلوم ہوتا ہے کہ یہہ ممکن ہی کہ لو = ۰ اور مو = ۰ کے ایک ہی وقت مین ہو سکتی ہین

(۱۳) اب یہہ ثابت کرنا باقی رہا کہ ا اور ب جملہ $\text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1}$ مین جو لا کی بجای مندرج کرنے سے ج (لا) کو معدوم کرتا ہی متناہی ہے

$$\text{ج}(\text{لا}) = \text{ع}.\text{لا}^{n}\left\{1 + \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}.\text{لا}} + \frac{\text{ع}_2}{\text{ع}.\text{لا}^2} + \cdots + \frac{\text{ع}_n}{\text{ع}.\text{لا}^{n}}\right\}$$

اب بجای لا کے $\text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1}$ رکھو تو ج (لا) کی یہہ صورت ہو گی کہ

$$\text{ع}.(\text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1})^{n}\left[1 + \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}.(\text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1})} + \frac{\text{ع}_2}{\text{ع}.(\text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1})^2} + \cdots + \frac{\text{ع}_n}{\text{ع}.(\text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1})^{n}}\right]$$

اب جو سلسلہ خطوط وحدانی کی درمیان ہی اوسمین سی کسی رقم کو مثلا اوس رقم کو جسمین ع_2 ملتف ہو لو تو یہہ حاصل ہو گا کہ

$$\frac{\text{ع}_2}{\text{ع}.(\text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1})^2} = \frac{\text{ع}_2(\text{ا} - \text{ب}\sqrt{-1})^2}{\text{ع}.(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)^2} = \frac{\text{ع}_2(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)}{\text{ع}.(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)^2} - \frac{2\text{ع}_2\text{ا}\text{ب}\sqrt{-1}}{\text{ع}.(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)^2}$$

$= \text{با} + \text{بَا}\sqrt{-1}$ کے مقرر کرو

اب یہہ ظاہر ہی کہ جب ا اور ب غیر متناہی زیادہ ہوتی ہین تو با اور بَا غیر متناہی کم ہوتے ہین پس جب $\text{لا} = \text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1}$ کے ہو تو ج (لا) کی قیمت کو $\text{لو} + \text{مو}\sqrt{-1}$ کے تعبیر کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{لو} + \text{مو}\sqrt{-1} = \text{ع}.(\text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1})^{n}\left\{1 + \text{با} + \text{بَا}\sqrt{-1}\right\}$$

یہین ا اور ب کی غیر متناہی زیادہ ہونی سی با اور بَا لا نہایت کم ہوتی ہین اور یہہ بھی ہم کو حاصل ہے کہ

$$\text{لو} - \text{مو}\sqrt{-1} = \text{ع}.(\text{ا} - \text{ب}\sqrt{-1})^{n}\left\{1 + \text{با} - \text{بَا}\sqrt{-1}\right\}$$

$$\text{پس}\quad \text{لو}^2 + \text{مو}^2 = \text{ع}^2.(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)^{n}\left\{(1 + \text{با})^2 + \text{بَا}^2\right\}$$

اور یہہ لا انتہا زیادہ ہوتا جبکہ ا اور ب لا انتہا زیادہ ہون کیونکہ ایک جزو ضربی $(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)^{n}$

غیر متناہی زیادہ ہوتا ہی اور ایک جزضربی $(1+\frac{1}{n})^2 + \frac{b}{n}$ کی نہایت الانتہا کی طرف پہونچتی ہے
پس لو $\rightarrow$ ہو ا اوس حالت میں معلوم نہیں ہوسکتی کہ ا اور ب لا انتہا زیادہ ہوں یا ایک دنیں سی غیر متناہی زیادہ ہو

(۳۱) اس بات پر بھی خیال کرنا چاہیئے کہ دفعہ ۲۹ کی اثبات میں مساوات معروضہ کی مثال اصلی اور خیالی دونو ہوسکتی ہیں مگر اس کتاب میں سب جگہ امثال سے امثال اصلی مراد ہیں بشرطیکہ اوسکی خلاف کہیں نہ بیان کیا گیا ہو

(۳۲) مساوات کی ایک قیمت کی ہونی کا جو اثبات لکھا گیا ہی اوسکو کوچی صاحب کا اثبات کہتی ہیں
اب اس مضمون پر بہت مباحثہ عظیم ہوا ہی اوسکی تمام کیفیت کیمبرج کی فلوزوفیکل سوسائیٹی کی دسویں جلد میں لکھی ہی اوسمیں ایک بحث ڈی مورگن صاحب نی لکھی ہی اور دوسرے مسٹر ایری صاحب نی لکھی اور پھر ایری صاحب کی بحث کا ایک تکملہ بھی اوسمیں موجود ہی ڈی مورگن صاحب نی لکھا ہی کہ جو اثبات کہ کوچی صاحب کا مشہور ہے وہ پہلی ارگیند صاحب نے لکھا ہے

تیسرا باب خواص معادلات

(۳۳) جتنی درجہ کی مساوات ہوتی ہی اوتنی ہی اوسمیں قیمتیں ہوتی ہیں
فرض کرو کہ مساوات ن درجہ کی ہی اور ج (لا) = ۰ سے تعبیر ہوتی ہے اسمیں

$$ج (لا) = ع_٠ لا^ن + ع_١ لا^{ن-١} + ع_٢ لا^{ن-٢} + \ldots\ldots + ع_{ن-١} لا + ع_ن$$

بموجب باب دوم کی اس مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک قیمت ضرور ہوگی خواہ وہ اصلی ہو یا خیالی
اس قیمت کو ا١ سی تعبیر کرو تو بموجب دفعہ ۴ کی ج (لا) پورا لا − ا١ پر تقسیم ہوگا اور اسلئی
ج (لا) = (لا − ا١) مح١ (لا) اسمیں مح١ (لا) کوئی جملہ جبریہ صحیحہ لا کا
(ن − ١) درجہ کا ہی اب پھر بموجب باب دوم کی مح١ (لا) = ۰ کی ایک قیمت اصلی یا خیالی ہے
اوسکو ا٢ سی تعبیر کرو تو بموجب دفعہ ۴ کی مح١ (لا) پورا لا − ا٢ پر تقسیم ہوگا اور اسیواسطے
مح١ (لا) = (لا − ا٢) مح٢ (لا) اسمیں مح٢ (لا) ایک جملہ صحیحہ جبریہ لا کا (ن − ٢) درجہ کا ہی
اسیواسطی ج (لا) = (لا − ا١) (لا − ا٢) مح٢ (لا) اور اسیطرح عمل کرنے سے
ج (لا) کی ن اجزاء ضربی لا − ا١ اور لا − ا٢ اور ...... لا − ان حاصل ہونگے

اور ایک اور جزضربی ع ہوگا کیونکہ امثال لا ن کے ج (لا) مین ع ہے پس
ج (لا) = ع (لا - ا۱) (لا - ا۲) (لا - ا۳) . . . (لا - ان)
اسی معلوم ہوا کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی ن قیمتین ہین کیونکہ ن مقادیر
ا۱ و ا۲ . . . ان مین سی کوئی مقدار بجای لا کی ج (لا) مین رکہین تو وہ اوسکو معدوم
کردیگی اور اس مساوات کی ن قیمتون سی زیادہ کوئی قیمت نہ ہوگی اسلئی کہ اگر لا کے کوئی اور قیمت
س جو ن قیمتون ا۱ اور ا۲ . . . ان مین سی نہ ہو مقرر کرین تو ج (لا) یہہ ہوجائیگا
کہ ع (س - ا۱) (س - ا۲) (س - ا۳) . . . (س - ان)
اب یہہ صفر نہین ہوسکتا ہے واسطے کہ ہر یک جزضربی اسکا مختلف صفر سی ہی اور حاصل ضرب اجزا ضربی کا
خواہ اصلی ہو یا خیالی ہو معدوم نہین ہوسکتا جب تک کہ کوئی جزضربی خود معدوم نہ ہوتا ہو دفعہ ۲۶ کو دیکہو
(۳۴) دفعہ گذشتہ مین تمام قیمتین کیا اصلی ہونگین یا اس صورت ا + ب $\sqrt{-1}$ کی جسمین ا اور ب اصلی
ہین اور بعض قیمتین ا۱ اور ا۲ . . . ان مین برابر بہی ہوسکتی ہین اسلئی کچہہ ضرور نہین کہ ن درجہ کی
مساوات کی ن مختلف قیمتین ہی ہون شاید طالب علم اس بات پر مناقشہ کریگا کہ ن درجہ کی مساوات
کی ن قیمتین کسطرح ہوسکتی ہین جب کہ اونکا ایسمین مختلف ہونا ضرور نہ ہو تو ہم یہہ کہتی ہین کہ
اسمین بڑی آسانی ہی کہ ن درجہ کی مساوات کی ن ہی قیمتین کہی جائین گو اونمین بعض قیمتین
آپسمین برابر ہون جیسا کہ جبر مقابلہ مین مساوات درجہ دوم ا لا۲ + ب لا + ح = ۰ مین بیان کیا گیا ہے
کہ جب ب۲ = ۴ ا ح تو اوسکی دو برابر قیمتین گننی مین بہ نسبت ایک قیمت گننی کی آسانی ہے
(۳۵) اب جو ہم نی امکان مساوی قیمتون کے داخل ہونی کا بیان کیا اوسکا اثر دفعات گذشتہ مین سے
صرف ایک دفعہ ۲۲ پر ہوتا ہی اوس دفعہ مین یہہ ثابت کیا ہی کہ مساوات خاص صورت کی دو مختلف
مثبت قیمتین نہین ہوسکتین لیکن اس بات کو اثبات مین نہین ثابت کیا ہی کہ جس قیمت کا ہونا ضرور ہے
اوسکی برابر ایک قیمت یا کئی قیمتون کا ہونا ممکن نہین جب ہم دس کارٹیز صاحب کا قاعدہ علامات ثابت
کرینگی اوسوقت یہہ بات ظاہر ہوجائیگی کہ مساوات جسپر بحث کی گئی ہی ایک قیمت رکہتی ہی اور وہ مکرر نہین آتی

(۳۶) اگر مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک قیمت ا، ہم کو معلوم ہو تو ہم کو یہہ معلوم ہوتا ہی کہ
ج (لا) = (لا - ا،) مح، لا اسمین مح، لا ایک جملہ لا کا ایک درجہ کم ج (لا) سے ہے
اور باقی قیمتین ج (لا) = ۰ کی دریافت ہو سکتی ہین اگر ہم مساوات مح، (لا) = ۰ کو
جو مساوات ایک درجہ کم بہ نسبت ج (لا) = ۰ کی ہی حل کرین اور علی ہذا القیاس اگر ہم کو دو قیمتین ا، اور ا۲
مساوات ج (لا) = ۰ معلوم ہون تو ہم کو معلوم ہی کہ ج (لا) = (لا - ا،) (لا - ا۲) مح۲ (لا)
اسمین مح۲ (لا) ایک جملہ لا کا دو درجہ کم بہ نسبت ج (لا) کی ہی اور باقی قیمتین ج (لا) = ۰ کی
مساوات مح۲ (لا) = ۰ کی حل کرنی سی دریافت ہو سکتی ہین یہہ مساوات دو درجہ کم بہ نسبت
ج (لا) = ۰ کے ہے اور علی ہذا القیاس

(۳۷) اگر ج (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ن درجہ کا ہو تو ہم نی یہہ ثابت کر دیا ہی
کہ ج (لا) اول درجہ کے ن اجزاء ضربی مین تحلیل ہونی کی ایسی قابلیت رکھتا ہے کہ

ج (لا) = ع. (لا - ا،) (لا - ا۲) . . . (لا - ان)

اسمین ا، و ا۲ . . . ان کیا اصلی یا خیالی ہین اس بات پر غور کرنی چاہیی کہ ج (لا) جن اجزاء
ضربی مین تحلیل ہو سکتا ہی اوسکا نظم ایک ہی ہوتا ہی جب مقادیر ا، اور ا۲ . . . ان
سب غیر مساوی ہون تو ایک نظم کا اجزاء ضربی مین ہونا ظاہر ہی مگر جب بعض مقادیر
ا، و ا۲ و ا۳ . . . ان مین مساوی ہون تو ج (لا) کی مختلف طور سی اس طرح ترکیب نہین پا سکتا
کہ ایک ہی اجزاء ضربی کے مختلف قوت نما ہون اگر یہہ ممکن ہو تو فرض کرو

ج (لا) = ع. (لا - ا،)^ر (لا - ا۲)^ص (لا - ا۳)^ط . . . .

اور ج (لا) = ع. (لا - ا،)^ر' (لا - ا۲)^ص' (لا - ا۳)^ط' . . .

اب فرض کرو کہ ر بڑا ر' سی ہی تو (لا - ا،)^ر' پر تقسیم کرنے سے یہہ حاصل ہو گا کہ

ع. (لا - ا،)^ر-ر' (لا - ا۲)^ص (لا - ا۳)^ط . . . = ع. (لا - ا۲)^ص' (لا - ا۳)^ط' . . .

اب دائین طرف کا رکن مساوات لا = ا، کی ہونی سی معدوم ہوتا ہی مگر بائین طرف کا رکن معدوم

نہین ہوتا اسلیی ان جملون مین تطبیق نہین ہوسکتی اسی ثابت ہوا کہ ج (لا) کی اجزا ضربی کا لسلہ ایکہی ہوتا ہے

(۳۸) اگر کوئی ن درجہ کا جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ن مختلف لا کی قیمتون سی زیادہ قیمتون سی معدوم ہوتا ہو تو جملہ مین ہر امثال صفر ہوگا اور جملہ بہی لا کی ہر قیمت کی موافق صفر ہوگا

اسواسطی کہ اگر جملہ لا مین کوئی امثال صفر نہ ہو تو لا کی مختلف قیمتون سی جو تعداد مین ن سے زیادہ ہون جملہ معدوم نہ ہوگا پس اگر ن سی زیادہ مختلف قیمتون سے لا کی جملہ معدوم ہوتا ہے تو ہریک امثال جملہ مین صفر ہونا چاہیے

(۳۹) دفعہ گذشتہ مین جو ثبوت لکہا ہے وہ مسئلہ کی اثبات کو موقوف اس بات پر کرتا ہی کہ مساوات ن درجہ کی ن قیمتین ہوتی ہین اور اخر کار یہہ مقدمہ باب دوم کی تحقیقات پر موقوف ہو جاتا ہے لیکن اسی مسئلہ کو ہم استقراء سی ہی ثابت کر سکتی ہین اور پہر اوسکی واسطی ضرورت باب دوم کی تحقیقات کی نہین ہے

فرض کرو کہ لا کا جملہ جو ن درجہ کا ہو وہ ن سی زیادہ قیمتون کے موافق معدوم ہوتا ہوا در جملہ مین ہر امثال صفر ہی تو اب ہم یہہ ثابت کرنا چاہتی ہین کہ لا کا جملہ (ن + ۱) درجہ کا ن + ۱ مختلف قیمتون سے زیادہ قیمتون سی معدوم ہوگا اور ہریک امثال جملہ مین صفر ہوگا

فرض کرو کہ $ج(لا) = ق_0 لا^{ن+1} + ق_1 لا^{ن} + ق_2 لا^{ن-1} + \dots + ق_ن لا + ق$

اور فرض کرو کہ (ن + ۱) قیمتون سی زیادہ قیمتین لا کی ج (لا) کو فنا کرتی ہین اور ا ایک قیمت ان قیمتون مین ایسی ہی کہ ج (ا) = ۰ کی ہوتا ہی تو $ج(لا) = ج(لا) - ج(ا)$

$$= ق_0 (لا^{ن+1} - ا^{ن+1}) + ق_1 (لا^{ن} - ا^{ن}) + ق_2 (لا^{ن-1} - ا^{ن-1}) + \dots + ق_ن (لا - ا)$$

اسکو اس صورت سی لکہہ سکتی ہین کہ

$$ج(لا) = (لا - ا)\, مج(لا)$$

اسمین مج (لا) جملہ لا کا ن درجہ کا ہے

چونکہ لا کی ن مختلف قیمتون سی زیادہ ایسی قیمتین کہ ج (لا) کو معدوم کرتی ہین اور ان قیمتون سے ا خارج ہے تو لا کی ن مختلف قیمتون سی زیادہ قیمتین ایسی ہونگین کہ مج (لا) کو فنا کرتی ہین اور اسیواسطے بموجب فرض کے ہریک امثال مج (لا) مین صفر ہی اب بموجب دفعہ ۷ کے

مج (لا) = ق. لا^ن + (ق. ا + ق۱) لا^ن-۱ + (ق. ا^۲ + ق۱ ا + ق۲) لا^ن-۲ . . .

پس ق. = . کیونکہ لا^ن کا امثال صفر ہی پس ق۱ = . کیونکہ لا^ن-۱ کا امثال صفر ہے

تو ق۲ = . کیونکہ لا^ن-۲ کا امثال صفر ہی اور علی ہذا القیاس

پس ج (لا) مین ہر ایک امثال صفر ہے

اسی دعوی ثابت ہی کیونکہ یہہ ہم کو معلوم ہی کہ وہ اول اور دوم درجہ کی جملون کے صورت مین ثابت ہے

(۷۰) اگر ج (لا) ن درجہ کا جملہ لا کا ہو تو ہم نی ثابت کر دیا ہی کہ ج (لا) اول درجہ کے ن اجزاء ضربی مین تحلیل ہو سکتا ہی ان اجزاء ضربی مین سی ہر ایک ج (لا) کو پورا تقسیم کریگا

تو ج (لا) کی ن مقسوم علیہ پوری بانٹنی والی ہونگی اور حاصل ضرب ان اجزاء ضربی مین سی کسی دو اجزاء ضربی کا درجہ دوم کا جز ضربی ج (لا) کا ہوگا اور اسیواسطے

ج (لا) کی $\frac{ن(ن-۱)}{۲}$ مقسوم علیہ پوری بانٹنی والی درجہ دوم کے ہونگی اور اسیطرح عمل کرنے سے

ہم کو معلوم ہوگا کہ ج (لا) کی مقسوم علیہ پوری بانٹنی والی ر درجہ کی اوتنی ہونگی جتنی کہ اجتماع

ن اشیا مین سی ر اشیا کی ہوتی ہین یعنی ج (لا) کی ر درجہ کے مقسوم علیہ پوری بانٹنی والی $\frac{ن(ن-۱) . . . (ن-ر+۱)}{لـر}$ ہونگی

لیکن اس بات کو بہی یاد رکہنا چاہئی کہ مقسوم کسی درجہ کے مثلاً دوم درجہ کی یہہ ضرور نہین کہ مختلف ہی ہون

کیونکہ یہہ کچہہ ضرور نہین ہے کہ اول درجہ کی اجزاء ضربی سب مختلف ہون غرض خلاصہ مطلب یہہ ہے

کہ ر درجہ کی مختلف مقسوم علیہ $\frac{ن(ن-۱) . . . (ن-ر+۱)}{لـر}$ سے زیادہ نہین ہو سکتی

(۷۱) مساوات جسمین امثال اصلی ہون اوسکے قیمتون مین خیالی قیمتون کے ازواج ہوتے ہین یعنی جوڑی ہوتے ہین

فرض کرو کہ ج (لا) ایک جملہ صحیح ناطقہ لا کا ہی جسمین امثال لا کی سب اصلی ہین پس اگر

سه + صه √-۱ ایک قیمت مساوات ج (لا) = ۰ کی ہو تو ضرور ہی کہ سه - صه √-۱ بہی ایک قیمت ہوگی

اسواسطی کہ جب سه + صه √-۱ کو لا کی جگہ جملہ (لا) مین رکہین تو اوسکی صورت

ع + ق صه √-۱ کی ہوگی جسمین ع اور ق مین صه کی جفت قوتین ملتی ہین

یہہ بات ظاہر ہی کیونکہ اگر لا کے جملہ کو پہیلائین اور اوسمین لا = سه + صه √-۱ تو

صہ √-۱ کی جفت قوتین اصلی قیمتین پیدا کرینگے اور ہہ √-۱ صہ کا تعلق طاق قوا ساتھہ ہوگا اور چونکہ ج (لا) کی امثال سب اصلی مانی گئی ہین √-۱ کا
کسی طرح سوا صہ کے طاق قوا کے نہین واقع ہو سکتا
پس اگر سہ - صہ √-۱ بجای لا کی ج (لا) مین رکھا جای تو وہ ماحصل حاصل ہوگا جو لا کی جگہ سہ + صہ √-۱ کی رکھنے حاصل ہوا تھا مگر اوسمین صہ کی علامت بدلی ہوئی ہوگی اسیواسطی ماحصل ع - ق صہ √-۱ ہوگا پس اگر سہ + صہ √-۱ ایک قیمت ج (لا) = ۰ کی ہو تو چاہی کہ ع = ۰ اور ق = ۰ کے ہو اسلئی مساوات
ع - ق صہ √-۱ برابر صفر کے ہوگا اسواسطی سہ + صہ √-۱ بہی ایک قیمت مساوات ج (لا) = ۰ کے ہوگی
(۴۲) اگر ج (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہو اور اوسمین سب امثال اصلی ہون اور ایک جز ضربی اوسکا لا - ا₁ ہو اور اسمین ا₁ = سہ + صہ √-۱ کے ہو تو اوسکا دوسرا جز ضربی لا - ا₂ ہوگا جسمین ا₂ = سہ - صہ √-۱ ہوگا اور حاصل ضرب ان دو اجزاء ضربی لا - سہ - صہ √-۱ اور لا - سہ + صہ √-۱ کا (لا - سہ)² + صہ² یعنی
لا² - ۲ سہ لا + سہ² + صہ² ہی یعنی حاصل ضرب ایک اصلی درجہ دوم کا جز ضربی ہے
(۴۳) پس ہم کو یہہ نتیجہ حاصل ہوا کہ ہر جملہ صحیحہ ناطقہ لا کو جسمین سب اصلی مثال ہون یون خیال کر سکتی ہین کہ وہ حاصل ضرب اصلی اجزاء ضربی کا ہی خواہ وہ اول درجہ کی ہون یا درجہ دوم کی ج (لا) اس صورت کا ہوگا کہ (لا - ا) (لا - ب) (لا - س) ۰ ۰ ۰ (لا - ک) مج (لا) اسمین
ا اور ب اور س ۰ ۰ ک سب اصلی قیمتین ج (لا) = ۰ کی ہین اور مج (لا) وہ جملہ ہے جسمین حاصل ضرب درجہ دوم کی اجزاء ضربی کا ہی اور اوسکی علامت نہین بدل سکتی
(۴۴) دفعہ ۴۱ کی طرح یہہ دعوی بہی ثابت ہو سکتا ہی کہ اگر ج (لا) جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہو اور امثال بہی اوسکی ناطقہ ہون اور مساوات ج (لا) = ۰ کی قیمت ا + √ب کے صورت کے ہو تو

جسمین $\text{ا}+\sqrt{\text{ب}}$ ایک مقدار اصم ہی تو اوس مساوات کی $\text{ا}-\sqrt{\text{ب}}$ بہی ضرور ہوگی
پس ج (لا) کا ایک جز ضربی درجہ دوم کا $(\text{لا}-\text{ا})^{2}-\text{ب}$ ہوگا

(۴۵) جملہ ج (لا) اور مساوات ج (لا) = ۰ کی امثال میں جو ارتباط باہمی ہو اوسکو دریافت کرو

فرض کرو کہ $\text{ج}(\text{لا}) = \text{لا}^{\text{ن}} + \text{ع}_1 \text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ع}_2 \text{لا}^{\text{ن}-2} + \cdots + \text{ع}_{\text{ن}-1}\text{لا} + \text{ع}_{\text{ن}}$

اور فرض کرو کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی قیمتیں ا_1 اور ا_2 ... $\text{ا}_{\text{ن}}$ ہیں تو

$$\text{ج}(\text{لا}) = (\text{لا}-\text{ا}_1)(\text{لا}-\text{ا}_2)\cdots(\text{لا}-\text{ا}_{\text{ن}})$$

چونکہ دونو صور مفصلہ بیانیہ ج (لا) کی مساوات متطابقہ ہیں اسلئے امثال ع_1 و ع_2 ... $\text{ع}_{\text{ن}}$ اور مقادیر ا_1 و ا_2 و $\text{ا}_{\text{ن}}$ میں باہمی ارتباط ہی اب اس ارتباط کے توضیح ذیل میں کرتی ہیں کہ معمولی ضرب کے قاعدہ سی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$(\text{لا}-\text{ا}_1)(\text{لا}-\text{ا}_2) = \text{لا}^2 - (\text{ا}_1+\text{ا}_2)\text{لا} + \text{ا}_1\text{ا}_2$$

$$(\text{لا}-\text{ا}_1)(\text{لا}-\text{ا}_2)(\text{لا}-\text{ا}_3) = \text{لا}^3 - (\text{ا}_1+\text{ا}_2+\text{ا}_3)\text{لا}^2$$
$$+(\text{ا}_1\text{ا}_2+\text{ا}_2\text{ا}_3+\text{ا}_3\text{ا}_1)\text{لا} - \text{ا}_1\text{ا}_2\text{ا}_3$$

$$(\text{لا}-\text{ا}_1)(\text{لا}-\text{ا}_2)(\text{لا}-\text{ا}_3)(\text{لا}-\text{ا}_4) = \text{لا}^4 - (\text{ا}_1+\text{ا}_2+\text{ا}_3+\text{ا}_4)\text{لا}^3$$
$$+(\text{ا}_1\text{ا}_2+\text{ا}_1\text{ا}_3+\text{ا}_1\text{ا}_4+\text{ا}_2\text{ا}_3+\text{ا}_2\text{ا}_4+\text{ا}_3\text{ا}_4)\text{لا}^2$$
$$-(\text{ا}_1\text{ا}_2\text{ا}_3+\text{ا}_1\text{ا}_2\text{ا}_4+\text{ا}_1\text{ا}_3\text{ا}_4+\text{ا}_2\text{ا}_3\text{ا}_4)\text{لا}+\text{ا}_1\text{ا}_2\text{ا}_3\text{ا}_4$$

اب ان ماحصل میں ہم یہہ قوانین دیکھتے ہیں کہ

اول بائیں طرف میں تعداد ارقام بہ نسبت تعداد اجزاء ضربی کی جو باہم ضرب دی گئی ہیں بقدر ایک کے زیادہ ہے

دوم قوت نما لا کا اول رقم میں تعداد اجزاء ضربی کی برابر ہے اور اگلے ہر رقم میں قوت نما بقدر ایک کے اپنی ماقبل کی رقم کے قوت نما سی کم ہوتا جاتا ہے

سوم امثال اول رقم کا واحد ہی اور دوسرے رقم کا امثال مجموعہ اجزاء ضربی درجہ اول کے دوسرے رقموں کا ہی اور تیسری رقم کا امثال اجزاء ضربی درجہ اول کی دوسری رقموں میں

سی دو دو رقموں کی حاصل ضربوں کا مجموعہ ہی اور جو تہی رقم کا مثال اجزاء ضربی درجہ اول کے دوسری رقموں میں سی تین تین رقموں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ ہی وعلیٰ ہذا القیاس و آخر رقم اجزاء ضربی درجہ اول کی دوسری کل رقموں کا حاصل ضرب ہے

اب ہم یہہ ثابت کرینگے کہ تعداد اجزاء ضربی درجہ اول کی خواہ کچھہ ہی ہو سب صورتوں میں یہہ قوانین منصرف ہیں فرض کرو کہ ن - ۱ اجزاء ضربی جب آپسمین ضرب دیے جائیں تو یہہ قوانین اونمیں پائے جاتی ہیں یعنی یہہ فرض کرو کہ

$$(لا - ا_۱)(لا - ا_۲) \cdots (لا - ا_{ن-۱}) = لا^{ن-۱} + ق_۱ لا^{ن-۲} + ق_۲ لا^{ن-۳} + \cdots + ق_{ن-۲} لا + ق_{ن-۱}$$

اسمین $ق_۱$ = مجموعہ ارقام $-ا_۱$ و $-ا_۲$ و $-ا_{ن-۱}$

$ق_۲$ = ان ارقام میں سی دو دو کی حاصل ضربوں کے مجموعہ کے

$ق_۳$ = ان ارقام میں سی تین تین کی حاصل ضربوں کے مجموعہ کے

$ق_{ن-۱}$ = کل ان ارقام کے حاصل ضرب کے

اس مطابقہ کے طرفین کو لا - $ا_ن$ میں ضرب دو

$$(لا-ا_۱)(لا-ا_۲)\cdots(لا-ا_ن) = لا^ن + (ق_۱ - ا_ن) لا^{ن-۱} + (ق_۲ - ق_۱ ا_ن) لا^{ن-۲}$$
$$+ (ق_۳ - ق_۲ ا_ن) لا^{ن-۳} + \cdots - ق_{ن-۱} ا_ن$$

اب $ق_۱ - ا_ن = -ا_۱ - ا_۲ - \cdots - ا_{ن-۱} - ا_ن$

= مجموعہ کل ارقام $-ا_۱$ و $-ا_۲$ . . . $-ا_ن$ کے

$ق_۲ - ق_۱ ا_ن = ق_۲ + ا_ن (ا_۱ + ا_۲ + \cdots + ا_ن)$

= کل ارقام $-ا_۱$ و $-ا_۲$ . . ان میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کے

$ق_۳ - ق_۲ ا_ن = ق_۳ - ا_ن (ا_۱ ا_۲ + ا_۲ ا_۳ + \cdots)$

= کل ارقام $-ا_۱$ و $-ا_۲$ . . . ان میں سی تین تین کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کے

$-ق_{ن-۱}\ ا_ن$ = حاصل ضرب کل رقام $-ا_۱$ و $-ا_۲$ ... $-ا_ن$ کے

پس اسی ثابت ہوا کہ اگر قوانین مذکور ن-۱ اجزاء ضربی کی ضرب دینی مین پائی جاتی ہین تو وہ ن اجزاء ضربی کی ضرب دینی مین بھی پائی جاتی ہین مگر یہہ ثابت کرائی ہین کہ قوانین مذکور چار اجزاء ضربی کی ضرب دینی مین پائی جاتی ہین اسواسطی وہ پانچ اجزاء ضربی کی ضرب دینی بھی پائے جائینگے اور علی ہذا القیاس پس وہ بالعموم سب صورتون مین موجود ہونگے

اگر $ا_۱$ و $ا_۲$ ... $ا_ن$ قیمتین مساوات

$$لا^ن + ع_۱ لا^{ن-۱} + ع_۲ لا^{ن-۲} + \dots + ع_{ن-۱} لا + ع_ن = ۰$$ کے ہون

تو داہنی طرف کا رکن مساوات برابر ہوگا حاصل ضرب اجزاء ضربی $(لا-ا_۱)$ اور $(لا-ا_۲)$...$(لا-ا_ن)$ کے اور اسی یہہ نتایج حاصل ہونگی اگر مساوات سادہ صورت مین ہو تو اوسمین دوسری رقم کا امثال تمام قیمتون کی مجموعہ کی برابر ہوتا ہی مگر علامت بدلی ہوئی ہوتی ہی اور تیسرے رقم کا امثال برابر ہوتا ہی دو دو قیمتون کی حاصل ضربون کی مجموعہ کی مگر قیمتون کی علامت بدلی ہوئی ہوتی ہین اور چوتھی رقم کا امثال برابر ہوتا ہی تین تین قیمتون کی حاصل ضربون کے مجموعہ کی مگر اونکی علامتین بدلی ہوئی ... آخر رقم برابر ہوتی ہی تمام قیمتون کی حاصل ضرب کے مگر اونکی علامتین بدلی ہوئی

یا ہم ان قوانین کو اسطرح بیان کرتی ہین کہ امثال دوسری رقم کا جسکی علامت بدلی ہوئی ہی برابر تمام قیمتون کی مجموعہ کی اور امثال تیسری رقم کا برابر ہی دو دو قیمتون کے حاصل ضربون کی مجموعہ کی اور امثال چوتھی رقم کا جسکی علامت بدلی ہوئی ہو برابر ہوتا ہے تین تین قیمتون کے حاصل ضربون کی مجموعہ کی پس بالعموم اگر $ع_ر$ معمول کی موافق امثال $لا^{ن-ر}$ کا مساوات مین ہو تو

$(-۱)^ر ع_ر$ = ر قیمتون کے حاصل ضربون کے مجموعہ کے

(۴۶) شاید کسی کی دل مین یہہ خیال پیدا ہو کہ جو ارتباط اوپر بیان ہوئی ہین اونسے کسی مساوات مفروضہ کی قیمتین ہم کو معلوم ہوجائین کیونکہ اونسے مساواتین ایسی حاصل ہوتی ہین جنمین قیمتین ملتف ہوتی ہین اور تعداد ان مساواتون کی بھی اوتنی ہی ہوتی ہے جتنی کہ قیمتین ہین تو ان مساواتون مین سی سب قیمتون کو دور کرکے

ایک قیمت رہی دین اور اوس ایک قیمت کو دریافت کرلین لیکن جب ہم اور قیمتون کو مساواتون سی دور کرتی ہین تو مساوات مفروضہ ہی خود ہم کو دوبارہ حاصل ہوجاتی ہے اسواسطے کچھہ فایدہ نہین ہوتا مثلاً مساوات

لا۳ + ع۱ لا۲ + ع۲ لا + ع۳ = ۰ کے ہو

اور اوسکے قیمتین ا و ب و ج فرض کرو تو

- ا - ب - ج = ع۱

اب + ب ج + ج ا = ع۲

- ا ب ج = ع۳

اب ب اور ج کی دور کرکی ایک مساوات ایسی حاصل کرتے ہین کہ جسمین فقط ا ہی ہو تو اوسکی سب سے زیادہ آسان ترکیب یہہ ہے کہ ان تین مساواتون مین اول مساوات کو ا۲ مین ضرب دو اور دوسرے مساوات کو ا مین اور تیسرے مساوات کی ساتھہ حاصل کو جمع کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

- ا۳ - ا۲ب - ا۲ج + ا۲ب + ا ب ج + ج ا۲ - ا ب ج = ع۱ ا۲ + ع۲ ا + ع۳

یعنی ا۳ + ع۱ ا۲ + ع۲ ا + ع۳ = ۰

اب یہہ مساوات جو حاصل ہوی وہی ہی جو مساوات مفروضہ تہی فقط فرق اتنا ہی کہ لا کی جگہ ا ہی اور یہہ بات سمجھنی کچھہ مشکل نہین ہی کہ ارتباطات مذکورہ سی جب ہم نے ب اور ج کو دور کیا تو ایک مساوات تیسری درجہ ا کی حاصل ہوگئی ہم کو اسی مساوات کے حاصل ہونے کی توقع تہی کیونکہ حروف ا اور ب اور ج قیمتون کو تعبیر کرتی ہین اور اونمین باہم کچھہ تمیز نہین ہے اسلئے جو مساوات ا کی استخراج کرینگے اوسمین ا کی تین قیمتین ہونگین کیونکہ ا مساوات کی تینون قیمتون مین سی ہر ایک قیمت ہوسکتا ہی بس اسی ہم کو خوب یقین ہوگیا کہ امثال مساوات اور اوسکی معلوم قیمتون مین جو ارتباطات باہمی ہونگی اون پر جو اعمال جبریہ اس نظر سی کیے جائینگے کہ اور قیمتین سوا ایک کے دور ہوجائینگی اونسی مساوات مفروضہ پیدا ہوگی

(۴۷) دفعہ ۴۵ میں جو ارتباطات بیان ہوئی کو اونسی قیمتیں مساوات کی نہیں دریافت ہو سکتیں مگر اور بڑی بڑی نتایج اونسی مساوات کے باب میں مستنبط ہوتے ہیں

مثلاً ا۱، ا۲ ... ان قیمتیں مساوات

$$لا^{ن} + ع_1 لا^{ن-1} + ع_2 لا^{ن-2} \ldots + ع_{ن-1} لا + ع_ن = ۰$$ کی ہوں

$$تو \; -ع_1 = ا_1 + ا_2 + ا_3 + \ldots + ا_ن$$

$$ع_2 = ا_1 ا_2 + ا_1 ا_3 + \ldots + ا_2 ا_3 + \ldots$$

$$ع_1^2 - 2ع_2 = ا_1^2 + ا_2^2 + ا_3^2 + \ldots + ا_ن^2$$

یعنی $ع_1^2 - 2ع_2$ برابر ہی مساوات مفروضہ کی قیمتوں کی مجذوروں کے مجموعہ کی پس اگر مساوات $ع_1^2 - 2ع_2$ منفی ہو تو تمام قیمتیں مساوات کی اصلی نہیں ہونگیں

(۴۸) موافق دفعہ سابق کی اور ارتباطات بھی جنمیں قیمتیں ملتف ہوں مستنبط کر سکتی ہیں

مثلاً $(-1)^{ن-1} ع_{ن-1}$ = ن - ا قیمتوں کے حاصل ضرب کے مجموعہ کے

$(-1)^{ن} ع_ن$ = تمام قیمتوں کے حاصل ضرب

اسیواسطے تقسیم کرنے سے

$$\frac{-ع_{ن-1}}{ع_ن} = \frac{1}{ا_1} + \frac{1}{ا_2} + \ldots + \frac{1}{ا_ن}$$

= مجموعہ قیمتوں متکافیہ یا مقلوبہ کے

اور نیز

$$ع_1 \frac{ع_{ن-1}}{ع_ن} = (ا_1 + ا_2 + \ldots + ا_ن)\left(\frac{1}{ا_1} + \frac{1}{ا_2} + \ldots \frac{1}{ا_ن}\right)$$

$$= ن + \frac{ا_1}{ا_2} + \frac{ا_1}{ا_3} + \ldots + \frac{ا_2}{ا_1} + \frac{ا_2}{ا_3} + \ldots$$

اسیواسطے

$$\frac{ا_1}{ا_2} + \frac{ا_1}{ا_3} + \ldots + \frac{ا_2}{ا_1} + \frac{ا_2}{ا_3} + \ldots = \frac{ع_1 ع_{ن-1}}{ع_ن} - ن$$

باب چہارم تبدلات معادلات

(۴۹) عموماً مضمون اور مطلب اس باب کا یہہ ہی کہ مساوات معلوم سی ایک اور ایسی مساوات مستنبط کریں کہ جسکی قیمتیں مساوات معلوم کی قیمتوں سی ایک ارتباط خاص رکھتی ہوں

جب آگی دیکھینگے تو یہہ معلوم ہوگا کہ بہت سی تبدل ہیئت مساوات معلوم کی بغیر اوسکی قیمتوں کے معلوم ہونی کی ہو سکتی ہیں اور مثالوں سی معلوم ہوگا کہ یہہ تبدل ہیئت مساواتوں کی حل کرنی میں کام اتی ہیں

(۵۰) ایک مساوات کی ہئیت بدل کر دوسری مساوات ایسی بنا دو کہ اوسکی قیمتوں کے علامت بدل جاے

فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ مساوات ہی اور ی = - لا کے ایسا مقرر کرو کہ

جب لا کی کوئی خاص قیمت ہو تو ی کی وہی قیمت تعداد اً ہو مگر علامت اوسکی متضاد ہو

پس لا = - ی اور مساوات مطلوب ج (- ی) = ۰ کے ہے

اگر ج (لا) = ع. لاⁿ + ع۱ لاⁿ⁻¹ + ع۲ لاⁿ⁻² + . . . + ع ن-۱ لا + ع ن

مساوات ج (- ی) = ۰

ع. (- ی)ⁿ + ع۱ (- ی)ⁿ⁻¹ + ع۲ (- ی)ⁿ⁻² + . . . - ع ن-۱ ی + ع ن = ۰

یعنی ع. یⁿ - ع۱ یⁿ⁻¹ + ع۲ یⁿ⁻² + . . . ∓ ع ن-۱ ی ± ع ن = ۰

پس اسی معلوم ہوا کہ مساوات معلومہ کے ہئیت کو اگر اسطرح بدلیں کہ دوسری رقم سی شروع کر کے ہر یک رقم کی علامت کو بدل دیں تو مساوات مطلوب حاصل ہو جائیگی

(۵۱) دفعہ گذشتہ کی اخر میں جو قاعدہ بیان ہوا ہی اوسمیں مساوات مفروضہ کی اندر تمام رقمیں وہ فرض کی گئیں ہیں جو اوس درجہ کی مساوات میں واقع ہوا کرتی ہیں یعنی کسی مثال کو صفر نہیں فرض کیا اب اگر کوئی ایسی مثال ہو کہ جسمیں یہہ بات نہ پائی جائی مثلاً یہہ مساوات ہو کہ

لا⁶ + ۳ لا⁵ - ۴ لا³ - ۴ لا + ۷ = ۰

اسکو ایسی مساوات میں تبدیل کرنا ہو کہ جسکی قیمتیں باعتبار کمیت کی تو وہی ہوں جو اس مساوات کی قیمتیں ہیں مگر علامتیں انکے ہوں اونکی متضاد

لا = - ی کی رکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ی⁶ - ۳ ی⁵ + ۴ ی³ + ۴ ی + ۷ = ۰

اگر ہم چاہیں تو اصل مساوات کو اسطرح لکھیں کہ

لا⁶ + ۳ لا⁵ + ۰ × لا⁴ - ۴ لا³ + ۰ × لا² - ۴ لا + ۷ = ۰

تو بموجب قاعدہ دفعہ ۵۰ کے مساوات کے ہیئت بدل کر یہہ مساوات حاصل ہوگی کہ

$$ی^6 - ۳ی^5 + ۰ \times ی^4 + ۴ی^3 + ۰ \times ی^2 + ۴ی + ۷ = ۰$$

یعنی

$$ی^6 - ۳ی^5 + ۴ی^3 + ۴ی + ۷ = ۰$$

اور یہی مساوات سابق مین حاصل ہوئی تہی

مساوات مین جب وہ سب رقمین واقع ہون جو اوس درجہ کی مساوات مین واقع ہوتی ہین * یعنی کوئی امثال صفر نہ ہو تو ہم اوسکو مساوات کامل کہتے ہین اور کبھی کبھی اسی ہی کام بہت نکلتا ہی کہ مساوات کو کامل موافق حکمت مذکورہ کی بنالین یعنی جو رقمین نہون اونکو لکھہ لین اور امثال اونمین سے ہر ایک کی صفر بنائین

(۵۲) ایک مساوات کی ہیئت بدلکے دوسری مساوات ایسی بناؤ کہ جسکی قیمتین مساوات مفروض کے قیمتون سے کچہہ خاص گنی ہو یعنی خاص اضعاف ہون یا اجزا

فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ مساوات مفروضہ ہی اور مطلوب یہہ ہی کہ اس مساوات کی ہیئت بدل کر دوسرے مساوات ایسی بنائین کہ جسکی قیمتین ک گنی مساوات مفروضہ کی قیمتون سی ہو

ی = ک لا کے مقرر کرو جب لا کی کوئی خاص قیمت ہو تو ی کی قیمت ک گنی ہوگی

پس $لا = \frac{ی}{ک}$ اور مساوات مطلوب ج$\left(\frac{ی}{ک}\right)$ ہے

(۵۳) مثلا اس مساوات

$$لا^3 - \frac{۳لا^2}{۲} + \frac{۵لا}{۴} - \frac{۲}{۹} = ۰ \text{ کی}$$

ہیئت بدل کر دوسرے مساوات بناؤ جسکی قیمتین ک گنی ہون لا = $\frac{ی}{ک}$ کے رکہو اور پہر کتا مین سب کو ضرب دو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ی^3 - \frac{۳کی^2}{۲} + \frac{۵ک^2ی}{۴} - \frac{۲ک^3}{۹} = ۰$$

اس مثال سی ہم بتلائینگے کہ اس تبدل ہیئت کو کن کام مین لاسکتی ہین مساوات مفروضہ مین سب امثال صحیح نہین ہین تو ہم ک کی مناسب قیمت فرض کرکے مساوات کی ایسی ہیئت بدل کر دوسری مساوات پیدا کرسکتے ہین کہ جسمین سب امثال صحیح اعداد ہون

مثلاً ک = ۲ کے فرض کرو تو مساوات بدل کر

$$\text{ی}^{۳} - ۹\,\text{ی}^{۲} + ۴۵\,\text{ی} - ۸۴ = ۰$$ ہو جائینگے

عموماً یہہ فرض کرو کہ مساوات

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ع}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ع}_{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \cdots + \text{ع}_{\text{ن}-۱}\,\text{لا} + \text{ع}_{\text{ن}} = ۰$$ ہو

اب اگر ہم $\text{لا} = \frac{\text{ی}}{\text{ک}}$ کی فرض کرین اور سب کو $\text{ک}^{\text{ن}}$ مین ضرب دین تو جو مساوات اسطرح پیدا ہو گی اوسمین تمام امثال کی صحیح اعداد ہونی کی واسطی فقط اس بات کا تحقیق کرنا ضرور ہی کہ ہر یک رقم $\text{ع}_{\text{ر}}\,\text{ک}^{\text{ر}}\,\text{ی}^{\text{ن}-\text{ر}}$ کی واسطی ہر یک جز ضربی اوسکے بنائین جو ع ر کی نسبتمامین واقع ہو کم از کم اوسکی اعلی قوت ک ر مین واقع ہو

(۵۴) ایک مساوات کی ہیئت بدل کر دوسری مساوات ایسی پیدا کرو کہ اوسکی قیمتین مساوات مفروض کے قیمتون سی بقدر ایک مقدار مستقل کی جداگانہ کم ہون

فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ مساوات مفروضہ ہو اور یہہ مطلوب ہی کہ اس مساوات کی ہیئت بدل کر دوسری مساوات ایسی پیدا کرین کہ اوسکی قیمتین مساوات مفروضہ کی قیمتون سی بقدر مقدار مستقل ک کے کم ہون ی = لا − ک کی ایسا مقرر کرو کہ جب لا کی کوئی خاص قیمت لین تو قیمت ی کی اوسی بقدر ک کی کم ہو $\text{لا} = \text{ک} + \text{ی}$ اور مساوات مطلوب ج (ک + ی) = ۰ سے ہے

بموجب دفعہ ۱۰ اسکے مساوات (ک + ی) = ۰ کو پھیلاؤ تو

$$\text{ج}(\text{ک}) + \text{ی}\,\text{ج}'(\text{ک}) + \frac{\text{ی}^{۲}}{۲\times۱}\,\text{ج}''(\text{ک}) + \frac{\text{ی}^{۳}}{\lfloor ۳}\,\text{ج}'''(\text{ک}) + \cdots + \text{ی}^{\text{ن}}\,\frac{\text{ج}^{\text{ن}}(\text{ک})}{\lfloor \text{ن}} = ۰$$

پس اگر $\text{ج}(\text{لا}) = \text{ع}_{۰}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ع}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ع}_{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \cdots + \text{ع}_{\text{ن}-۱}\,\text{لا} + \text{ع}_{\text{ن}}$

مساوات ج (ک + ی) = ۰ کو موافق قواء متنازلہ ی کی بموجب دفعہ ۱۲ کی مرتب کرین تو

$$\text{ع}_{۰}\,\text{ی}^{\text{ن}} + (\text{ع}_{۱} + \text{ن}\,\text{ع}_{۰}\,\text{ک})\,\text{ی}^{\text{ن}-۱} + \left[\text{ع}_{۲} + (\text{ن}-۱)\,\text{ع}_{۱}\,\text{ک} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲\times۱}\,\text{ع}_{۰}\,\text{ک}^{۲}\right]\text{ی}^{\text{ن}-۲}$$
$$+ \left[\text{ع}_{\text{ر}} + (\text{ن}-\text{ر}+۱)\,\text{ع}_{\text{ر}-۱}\,\text{ک} + \cdots + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)\cdots(\text{ن}-\text{ر}+۱)}{\lfloor \text{ر}}\,\text{ع}_{۰}\,\text{ک}^{\text{ر}}\right]\text{ی}^{\text{ن}-\text{ر}}$$
$$+ \cdots + \text{ج}(\text{ک}) = ۰$$

(۵۵) اگر ایک مساوات کی ہیئت بدل کر دوسری مساوات ایسی پیدا کرنی ہو کہ جسکی قیمتین مساوات

مفروضہ کی قیمتوں سی بقدر ایک مقدار مستقل ھہ کی زیادہ ہوں تو ہم کو ترکیب سابق پر عمل کرنا چاہی
فرض کرو کہ مساوات ج (لا) = ۰ سی تعبیر ہو اور ی = لا + ھہ کے فرض کرو تو
لا = ی - ھہ اور مساوات مطلوب ج (ی - ھہ) = ۰ اب دفعہ گذشتہ کی نتیجہ مین - ھہ
بجای ک کی رکہو تو مساوات مطلوب حاصل ہو جائیگی اگر غور سی خیال کرو تو یہہ بات دفعہ گذشتہ
کی بیان مین ضمناً ثابت ہوگی اسلئے کہ اس دفعہ مین یہہ کچہہ ضرور نہین کہ ک قطعی مثبت مقدار ہے ہو
(۵۶) دفعہ ۵۴ جس تبدل ہیئت کو ہم نے حاصل کیا ہی اوسکا بڑا فایدہ یہہ ہی کہ ایک مساوات
مفروضہ مین سی جس رقم کو ہم تعین کرین معدوم ہو جاسے
مثلاً اگر بدلی ہوئی مساوات مین دوسری رقم کو معدوم کرنا چاہین تو ہم ک کو ایسا مقرر کرتی ہین
کہ ع۱ + ن ع۰ ک = ۰
یعنی ک = $-\frac{ع_۱}{ن ع_۰}$ ہو اور اگر ہم یہہ چاہین کہ بدلی ہوئی مساوات ی مین تیسری
رقم نہ رہی تو ہم ک کو اس دوسری درجہ کی مساوات سے دریافت کرین کہ

$$ع_۲ + (ن-۱) ع_۱ ک + \frac{ن(ن-۱)}{۱\times۲} ع_۰ ک^۲ = ۰$$

اب بالعموم یہہ ہی کہ بدلی ہوئی مساوات ی مین (ر+۱) وین رقم نہ رہی
تو ہم ک کو اس ر درجہ کی مساوات سے دریافت کرین کہ

$$ع_۰ ک^ر + \frac{ر}{ن} ع_۱ ک^{ر-۱} + \frac{ر(ر-۱)}{ن(ن-۱)} ع_۲ ک^{ر-۲} + \ldots + \frac{\lfloor ر \lfloor ن-ر}{\lfloor ن} ع_ر = ۰$$

اب ہم آگی بیان کرینگے کہ مساواتوں کی حل کرنی مین بڑی آسانی کسی خاص رقم کی اڑا دینی سی ہو جاتی ہے
(۵۷) مثلاً مساوات لا^۳ - ۶لا^۲ + ۴لا + ۵ = ۰ کی ہیئت بدل کر ایسی مساوات پیدا کرو کہ
اوسمین دوسری رقم نہ ہو یہان ع۰ = ۱ اور ع۱ = -۶ پس ک = ۲ اور مساوات مطلوبہ

$$(ی+۲)^۳ - ۶(ی+۲)^۲ + ۴(ی+۲) + ۵ = ۰$$

یعنی $ی^۳ - ۸ی - ۳ = ۰$

اب پہر اس مساوات لا^۳ - ۶لا^۲ - ۴لا + ۹ = ۰ کی ہیئت بدل کر ایک اور مساوات ایسی پیدا کرو

کہ اوسمیں تیسرے رقم نہ ہو $ی + ک$ کو بجای لا کے رکہو تو ہیئت بدلی ہوئی مساوات یہہ ہوگی

$$(ی+ک)^3 - 2(ی+ک)^2 - 4(ی+ک) + 9 = 0$$

یعنی $ی^3 + ی^2(3ک - 2) + ی(3ک^2 - 4ک - 4) + ک^3 - 2ک^2 - 4ک + 9 = 0$

یعنی اگر تیسرے رقم اڑانی منظور ہو تو مساوات $3ک^2 - 4ک - 4 = 0$ سی ک کو دریافت کرو

تو $ک = 2$ یا $-\frac{2}{3}$ کی حاصل ہوگا $ک = 2$ کی قیمت کی موافق بدلی ہوئی مساوات یہہ ہوگی کہ

$$ی^3 + 4ی^2 + 1 = 0$$

اور موافق قیمت $ک = -\frac{2}{3}$ کے ہیئت بدلی ہوئی مساوات

$$ی^3 - 4ی^2 + \frac{283}{27} = 0$$

(۵۸) ایک مساوات کی ہیئت بدل کر ایک اور مساوات ایسی پیدا کرو کہ جسکی قیمتیں سبکا فی مساوات مفروضہ کے قیمتوں کے جداگانہ ہوں

فرض کرو کہ $ج(لا) = 0$ مساوات مفروضہ ہو $ی = \frac{1}{لا}$ کی ایسا مقرر کرو کہ جب لا کی کوئی خاص قیمت معین ہو

تو قیمت ی کی متکافی اوس قیمت کی ہو پس $لا = \frac{1}{ی}$ اور مساوات مطلوب $ج(\frac{1}{ی}) = 0$ ہی

پس اگر $ج(لا) = ع_0 لا^ن + ع_1 لا^{ن-1} + ع_2 لا^{ن-2} + \dots + ع_{ن-1} لا + ع_ن$

تو مساوات $ج(\frac{1}{ی}) = 0$ یہہ ہوگی کہ

$$\frac{ع_0}{ی^ن} + \frac{ع_1}{ی^{ن-1}} + \frac{ع_2}{ی^{ن-2}} + \dots + \frac{ع_{ن-1}}{ی} + ع_ن = 0$$

یعنی $ع_ن ی^ن + ع_{ن-1} ی^{ن-1} + ع_{ن-2} ی^{ن-2} + \dots + ع_1 ی + ع_0 = 0$

(۵۹) ایک مساوات کی ہیئت بدل کر ایک اور مساوات ایسی پیدا کرو کہ جسکی قیمتیں مجذور مساوات مفروضہ کی ہر یک قیمتوں کے جداگانہ ہوں

فرض کرو کہ $ج(لا) = 0$ مساوات کو تعبیر کری اور $ی = لا^2$ کی ایسا مقرر کرو کہ جب لا کی کوئی خاص قیمت مقرر کیجائی تو ی کی قیمت اوسکا مجذور ہو پس $لا = \sqrt{ی}$ اور مساوات مطلوب $ج(\sqrt{ی}) = 0$ ہے

پس اگر $ج(لا) = ع_0 لا^ن + ع_1 لا^{ن-1} + ع_2 لا^{ن-2} + \dots + ع_{ن-1} لا + ع_ن$

تو مساوات ج (ی) = ۰ یہہ ہوگی کہ

ع. ی^ن/۲ + ع۱ ی^(ن-۱)/۲ + ع۲ ی^(ن-۲)/۲ + ... + ع ن-۱ ی^۱/۲ + ع ن = ۰

انتقال اور مجذور سے ہم کو یہہ حاصل ہوگا

(ع. ی^ن/۲ + ع۲ ی^(ن-۲)/۲ + ع۴ ی^(ن-۴)/۲ + ...)^۲ = (ع۱ ی^(ن-۱)/۲ + ع۳ ی^(ن-۳)/۲ + ...)^۲

جب طرفین مساوات کو نشر بجا لکہینگے تو وہ صورت منطق پیدا کرینگے اور جب سب رقموں کو ایک طرف لے اینگے تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ع.^۲ ی^ن + (۲ع. ع۲ − ع۱^۲) ی^(ن-۱) + (۲ع. ع۴ + ع۲^۲ − ۲ع۱ ع۳) ی^(ن-۲) + ... = ۰

(۶۰) مساوات کی تبدل ہیئت کی اور بہت سی صورتین ہوسکتی ہین مگر ہم نے اوسیقدر لکہی ہین جسقدر کہ اس مطلب کے سمجہنے کی لئی کافی ہین دفعہ ۴۵ مین جو ارتباط کا بیان ہوا ہی اونکی توضیح کے واسطی دو مثالین لکہکر اس باب کو ختم کرتے ہین

(۱) مساوات لا^۳ + ق لا + ر = ۰ کی ہیئت بدل کر ایسی مساوات پیدا کرو کہ جسکی قیمتین مجذور مساوات مفروضہ کے قیمتون کے تفاوت کا ہو

فرض کرو کہ ا اور ب اور ح قیمتین مساوات کی ہون تو بموجب دفعہ ۴۵ کے

ا + ب + ح = ۰ اب + ب ح + ح ا = ق اب ح = − ر

اسیواسطے ا^۲ + ب^۲ + ح^۲ = −۲ق

اور ہیئت بدلی ہوئی مساوات کی قیمتین (ا − ب)^۲ اور (ب − ح)^۲ اور (ا − ح)^۲ ہین

اب (ا − ب)^۲ = ا^۲ − ۲اب + ب^۲ = ا^۲ + ب^۲ + ح^۲ − ۲اب − ح^۲ =

ا^۲ + ب^۲ + ح^۲ − ۲اب ح/ح − ح^۲

= −۲ق + ۲ر/ح − ح^۲

پس اگر ی = −۲ق + ۲ر/لا − لا^۲ اوس حالت مین کہ لا کی قیمت ح ہو تو قیمت ی کی (ا − ب)^۲ ہوگی اور علی ہذا القیاس جب لا کی قیمتین ا اور ب ہون

تو قیمتیں ی کی (ب-ح)² اور (ح-ا)² ہو گی پس ہیئت بدلی ہوئی مساوات مساوات مفروضہ اور مساوات ی = -۲ق + ۲ر/لا - لا² میں سے لا کی دور کرنے سے حاصل ہو گی اور یہہ لا دور کرنا اسطرح ہو گا کہ

$$لا^۳ + ق لا + ر = ۰$$

$$اور لا^۳ + (۲ق + ی) لا - ۲ر = ۰$$

$$اسیواسطے (ق + ی) لا - ۳ر = ۰$$

پس لا = ۳ر/(ق+ی) مساوات مفروضہ میں اس قیمت کو سدرج کرو تو آخر کار یہہ مساوات حاصل ہو گی کہ

$$ی^۳ + ۶ق ی^۲ + ۹ق^۲ ی + ۲۷ر^۲ + ۴ق^۳ = ۰$$

اسی معلوم ہوتا ہی کہ اگر ۲۷ر² + ۴ق³ مثبت ہو تو بموجب دفعہ ۲۰ کے ہیئت بدلی ہوئی مساوات کی قیمت ایک اصلی منفی ہو گی اور اسیواسطے مساوات مفروضہ کی دو خیالی قیمتیں ہونگیں کیونکہ یہی ایک زوج قیمتوں کا ہو گا تو ہیئت بدلی ہوئی مساوات کی ایک منفی قیمت پیدا کرے

اگر ۲۷ر² + ۴ق³ صفر ہو تو ہیئت بدلی ہوئی مساوات کی ایک قیمت صفر ہو گی اور اسیواسطے مساوات مفروضہ کی دو برابر قیمتیں ہونگیں

(۲) مساوات لا³ + ع لا² + ق لا + ر = ۰ کی ہیئت بدل کر ایسی مساوات پیدا کرو کہ جسکی قیمتیں مجذور مساوات مفروضہ کی قیمتوں کی تفاوت کا ہو

لا = لاَ - ع/۳ رکھو تو مساوات مفروضہ ہو جائیگی کہ

$$(لاَ - \frac{ع}{۳})^۳ + ع(لاَ - \frac{ع}{۳})^۲ + ق(لاَ - \frac{ع}{۳}) + ر = ۰$$

یعنی $$لاَ^۳ + قَ لاَ + رَ = ۰$$

اسمیں $قَ = ق - \frac{ع^۲}{۳}$ ، $رَ = \frac{۲ع^۳}{۲۷} - \frac{ع ق}{۳} + ر$

اخیر مساوات کی ہر یک قیمت مساوات مفروضہ کی ہر یک قیمت سے موافق نظیر کی بقدر ع/۳ کی زیادہ

اسواسطی اخر مساوات کی قیمتون کے مجذورون کا تفاوت وہی ہوگا جو مساوات مفروضہ کی قیمتون کی مجذورون کا تفاوت ہی اور موافق مثال گذشتہ کی مساوات مطلوب یہہ ہی کہ

ی^{3} + ۶ق ی^{2} + ۹ق^{2} ی + ۲۷ر^{2} + ۴ق^{3} = ۰

یعنی　ی^{3} + ۲(۳ق − ع^{2}) ی^{2} + (۳ق − ع^{2})^{2} ی + $\frac{(\text{۲ع}^{3} - \text{۹ع ق} + \text{۲۷ر})^{2} + \text{۴}(\text{۳ق} - \text{ع}^{2})^{3}}{\text{۲۷}}$ = ۰

باب پنجم ڈس کارٹیس کا قاعدہ علامات کا

(۶۱) دفعات ۲۱ — ۴۲ مین ہم نی مثالین ایسی بیان کیت ہین کہ جنسے ج (لا) کے امثال کی تعلقات باہمی اور مساوات ج (لا) = ۰ کی قیمتون کی صفت ذاتی معلوم ہوتی ہی اب ہم اول چند حدود بیان کرینگی اور بعد ازان مسائل عامہ کی تحقیقات لکہینگے

(۶۲) اگر ایک سلسلہ ارقام کی ہو اور ہر یک رقم کی اول علامات + اور − سے کوئی ایک ہو تو سلسلہ دیکھنے کے بالترتیب خیال کرنے مین جب ایک رقم کی وہی علامت ہو جو اوسکی رقم ماقبل کی علامت ہی تو اوسکو تواتر کہینگے اور جب ایک رقم کی علامت اپنی رقم ماقبل کی علامت سی مخالف ہو تو اوسکو تغیر کہینگے مثلاً جملہ لا^{8} − ۳لا^{7} − ۴لا^{6} + ۷لا^{5} + ۳لا^{4} + ۲لا^{3} − لا^{2} − لا + ۱ مین چار تواتر اور چار تغیر ہین اول تواتر − ۴لا^{6} پر دوسرا تواتر + ۳لا^{4} پر اور تیسرا تواتر + ۲لا^{3} پر ہے اور چوتہا − لا پر اور اول تغیر − ۳لا^{7} اور دوسرا + ۷لا^{5} پر اور تیسرا − لا^{2} پر اور چوتہا + ۱ پر واقع ہوتا ہے

یہہ ظاہر ہی کہ جب مساوات کامل ہو تو اوسکی مجموعہ تواترات اور تغیر کی تعدادون کا اوس عدد کی برابر ہوگا جو مساوات کا درجہ تبلا رہا ہی دفعہ ۱۵ دیکہو

اور اگر ہم کسی مساوات کامل مین − لا بجای لا کی رکہہ دین تو نئی مساوات مین اصلی مساوات کی تغیر تواتر بنجاینگے اور تواتر تغیر ہو جاینگے مساوات ج (لا) = ۰ مین جو کامل نہ ہو ج (لا) اور ج (− لا) کی تغیرات کی تعدادون کا مجموعہ ایسا عدد نہیں ہوگا کہ مساوات کی درجہ سے بڑہ جاے وجہ اسکی یہہ ہی کہ جب ج (لا) مین بعض ارقام معدوم ہون تو یہہ ممکن ہے کہ ج (لا) اور ج (− لا) کے تغیرات کی تعداد کم ہو جاے مگر اوسکا زیادہ ہونا ناممکن ہے

اب ہم ایک مسئلہ کا بیان کرتی ہین اور اوسکو ثابت بہی کرتی ہین اوسکو ڈس کارٹس کا قاعدہ علامات کہتے ہیں

(۴۳) کسی مساوات مین خواہ وہ کامل ہو یا نا کامل تعداد مثبت قیمتون کی اشکال کی تغیرات علامات کی تعداد سے زیادہ نہین ہوسکتی اور کسی مساوات کامل مین تعداد منفی قیمتون کی اشکال کی تواتر علامات کی تعداد سے زیادہ نہین ہوسکتی

اول ہم ثابت کرینگے کہ کسی کثیر الارقام جملہ کو ہم جز ضربی لا - ا مین ضرب دین تو کم از کم حاصل ضرب مین ایک تغیر علامت بہ نسبت اصلی جملہ کے زیادہ ہوجائیگا

مثلاً فرض کرو کہ ایک اصلی جملہ کثیر الارقام کی علامات + + - - - + - - + - - + ہین اور اس کثیر الارقام کو جملہ ثنائی مین ضرب دیا ہے اور اوسکی علامتین + - ہین اب اگر ان علامتون کو لکھکر عمل ضرب کا کرین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$
\begin{array}{r}
+\;-\;-\;+\;-\;+\;-\;-\;-\;+\;+\\
-\;+\\
\hline
+\;-\;-\;+\;-\;+\;-\;-\;-\;+\;+\\
+\;+\;-\;+\;-\;+\;+\;+\;-\;-\;-\\
\hline
-\;+\;\mp\;-\;+\;-\;+\;\mp\;\mp\;-\;\pm\;+
\end{array}
$$

دوہری علامت وہان لکہی ہے جہان کہ حاصل ضرب مین علامت کی اندر اشتباہ تہا

اب یہان یہہ قواعد نظر آتے ہین

(۱) اصلی کثیر الارقام مین ہر ایک تواتر کی مقابل مین جدید کثیر الارقام مین سلک علامات مشتبہ کی واقع ہے اور دونون مین تعداد علامات کی یکسان ہے

(۲) جدید کثیر الارقام مین علامت مشتبہ کی ما قبل اور مابعد کی علامات مین تضاد ہے

(۳) کثیر الارقام جدید مین اخر مین ایک تغیر زیادہ ہوگیا ہے

اب کثیر الارقام جدید مین ایک صورت ایسی لو کہ وہ سب سے زیادہ مخالف معلوم ہوتی ہو اور تمام علامات مشتبہ کی جگہ تواترات کو رکھو تو بموجب قانون دوم کی تواتر کی تعداد مین کچھہ فرق اسی نہین پڑیگا کہ علامات مشتبہ کی ہم اوپر کی علامت لین تو اصلی کثیر الارقام کی علامتین کثیر الارقام جدید مین مکرر

اسکی بابت جب تیسری قانون کی ایک تغیر علامات کا کثیر الارقام جدید کا اخر مین زیادہ داخل ہوجایگا پس جب ایسی صورت مخالف مین ایک تغیر علامت کا کثیر الارقام جدید مین بہ نسبت اصلی کثیر الارقام کے زیادہ ہوگیا تو اور صورتون مین کیون نہ ہوگا

اب اگر ہم یہہ فرض کرین کہ ایک مساوات کی منفی اور خیالی قیمتون کے موافق اجزاء ضربی کی حاصل ضرب کو ایک مثبت قیمت کی مطابق جزو ضربی مین ضرب دین تو کم از کم ایک تغیر علامت کا اوسمین داخل ہوجایگا اسواسطے کسی مساوات مین تغیرات علامت کی تعداد سی زیادہ مثبت قیمتون کی تعداد نہین ہوسکتی

اب ڈیکارٹیس کے قاعدہ علامات کا دوسرا جزو ثابت کرتی ہین فرض کرو کہ مساوات کامل ہے تو بجای لا کی − لا رکھنی سی مثبت مساوات کی ایسی بدل جائیگی کہ اصل تواتر علامت تغیر علامت اور تغیر علامت تواتر بنجائینگی اور اب اس بدلی ہوئی مساوات کی مثبت قیمتین بہ نسبت تغیرات کی زیادہ نہین ہوسکتین اور اسکی یہہ معنی ہین کہ اصلی مساوات کی منفی قیمتون کی تعداد اوسکی تواتر علامت کی تعداد سے زیادہ نہین ہوسکتی

(۶۴) خواہ مساوات ج (لا) = ۰ کامل ہو یا نہ ہو اوسکی قیمتین بلحاظ کمیت کے برابر مساوات ج (− لا) = ۰ کے قیمتون کی ہوتی ہین مگر علامت مین مخالف یعنی منفی قیمتین ج (لا) = ۰ کی مثبت قیمتین ج (− لا) = ۰ کی ہوتی ہین خواہ مساوات کامل ہو یا نہ ہو ج (− لا) = ۰ کی مثبت قیمتون کی تعداد ج (− لا) کے تغیرات علامت کی تعداد سی زیادہ نہین ہوسکتی پس کل قاعدہ علامات کا اسطرح مختصر بیان ہوسکتا ہے کہ ایک مساوات ج (لا) = ۰ کی مثبت قیمتین تعداد مین ج (لا) کے تغیرات علامت کی تعداد سی زیادہ نہین ہوسکتی اور اوسکی منفی قیمتون کی تعداد ج (− لا) کی تغیرات علامت کی تعداد سی زیادہ نہین ہوسکتی

(۶۵) مثلاً مساوات لا^۴ + ۳ لا^۳ + ۵ لا − ۷ = ۰ ہو یہاں ایک تغیر علامت ہے اسواسطے ایک مثبت قیمت سی زیادہ مثبت قیمتین نہین ہوسکتین اور لا کی جگہ − لا لکھو تو یہہ مساوات لا^۴ + ۳ لا^۳ − ۵ لا − ۷ = ۰ کی حاصل ہوتی اسمین ایک تغیر علامت کا ہی اسلئی اوسکی ایک

ایک مثبت قیمت سی زیادہ کوئی اور مثبت قیمت نہین ہوسکتی اسواسطے اصلی مساوات کی کوئی
منفی قیمت ایک سی زیادہ نہین ہوسکتی پس اصلی مساوات کی دو حقیقی قیمتون سی زیادہ قیمتین نہین ہوسکتین
اس مثال مین بموجب دفعہ ۲۱ کی ہم کو یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ایک مثبت قیمت ہی اور ایک منفی قیمت ہے
اور یہی ہم نی اوپر تحقیق کرکی لکھا ہی کہ ایک سی زیادہ ہر ایک قیمت نہین ہوسکتی

اب پہر مساوات لا^۳ + ق لا + ر = ۰ پر خیال کرو اور اسمین ق اور ر دونو مثبت ہین
اب یہان کوئی تغیر علامت نہین ہی اسواسطی اوسکی کوئی مثبت قیمت نہین ہی اور یہہ بات دفعہ ۲۴
کی موافق بہی ظاہر ہی اور اگر ہم لا کی جگہہ - لا لکہین تو مساوات مین ایک تغیر علامت کا ہوگا
تو اصلی مساوات کی ایک منفی قیمت سی زیادہ کوئی منفی قیمت نہین ہوسکتی اسلئے اصلی مساوات کی
دو خیالی قیمتین ہین

اب پہر مساوات لا^۳ - ق لا + ر = ۰ پر خیال کرو اور اسمین ق اور ر دونو مثبت ہین
اب یہان دو تغیر علامت کی ہین اسلئی اوسکی دو مثبت قیمتون سی زیادہ قیمتین نہین ہوسکتین
اور اگر لا کی جگہہ - لا لکہین تو مساوات ایسی حاصل ہوگی کہ اوسمین ایک تغیر علامت ہوگا پس اصلی
مساوات کی ایک منفی قیمت سی زیادہ کوئی منفی قیمت نہین ہوسکتی

اس مثال مین بموجب دفعہ ۲۰ کی ہم اس بات کو جانتی ہین کہ ایک منفی قیمت اوسکی ہے اور یہہ
اب ہم نی تحقیق کرکی لکہا ہی کہ ایک سی زیادہ منفی قیمت نہین ہوسکتی اور باقی دو قیمتین تحقیقی
مثبت مقادیر ہین یا خیالی مقادیر ہین اسکو ہم ڈس کارٹس کے قاعدہ علامات سی نہین دریافت کرسکتے
لیکن بموجب دفعہ ۲۰ کی یہہ نتیجہ پیدا ہوتا ہی کہ مساوات جسکی قیمتین مساوات مفروضہ کے
قیمتون کی مجذورون کی اثبات کی برابر ہون یہہ ہی کہ لا^۳ - ۶ ق لا^۲ + ۹ ق^۲ لا + ۲۷ ر^۲ - ۴ ق^۳ = ۰
اور ڈس کارٹس کے قاعدہ علامات اور دفعہ ۲۴ کی موافق اگر ۲۷ ر^۲ - ۴ ق^۳ منفی ہے
تو اخر مساوات کی کوئی قیمت منفی نہین ہوگی اور اسیواسطے اصلی مساوات کی کوئی قیمت خیالی نہوگی
اور اگر ۲۷ ر^۲ - ۴ ق^۳ مثبت ہی تو اخر مساوات کی بموجب دفعہ ۲۰ کے کوئی منفی قیمت نہین ہوتی کی

اسواسطے اصلی مساوات کی دو خیالی قیمتین ہونگین

(۶۶) طالب علم کو اس بات پر غور کرنی چاہیی کہ دفعہ ۲۴ مین جو نتایج لکھی ہین وہ بالکل ڈس کارٹس کے قاعدہ علامات کی مطابق ہین اور اوسیسے سب کے سب مستنبط ہوسکتی ہین اور دفعہ ۲۲ مین جو دعوی ثابت کیا ہے وہ بہی قاعدہ ڈس کارٹیس مین داخل ہی اور ہم کو اس قاعدہ سی یہہ بات بہی معلوم ہوتی ہے کہ دفعہ ۲۲ مین جس مساوات پر بحث ہوئی ہی اوسکی ایک مثبت قیمت سی زیادہ مثبت قیمتین ہوسکتی ہین خواہ برابر ہون خواہ نا برابر

(۶۷) ڈس کارٹس کے قاعدہ علامات مین یہہ ثابت ہوا ہی کہ کثیر الارقام کو ایک جز ضربی مین جو موافق ایک تحقیقی مثبت قیمت کی ہو ضرب دینی سی کم از کم ایک تغیر علامت داخل ہوسکتا ہے اب یہہ بیان کیا جاتا ہی کہ تغیرات علامات کی جو داخل کیی جاتی ہین تعداد مین طاق ہوتی ہین اسواسطے کہ اول فرض کرو کہ اصلی کثیر الارقام مین اخر علامت + ہی تو کل تعداد تغیرات علامت کی اصلی کثیر الارقام مین جفت یا صفر ہونی چاہیی اور کثیر الارقام جدید مین اخر علامت − ہی تو تعداد تغیرات علامت کی طاق ہونی چاہیی اسی معلوم ہوتا ہی کہ تغیرات علامت جو داخل کیی گیی ہین وہ طاق ہین جفت کا طاق جب ہے بنتا ہی کہ طاق زیادہ ہو

دوم فرض کرو کہ اخر علامت اصلی کثیر الارقام مین − ہی تو کثیر الارقام جدید مین اخر علامت + ہوگی تو اصلی کثیر الارقام مین تعداد تغیرات علامت کی طاق ہوگی اور کثیر الارقام جدید مین تعداد تغیرات علامت کی جفت ہوگی اسیواسطے تغیرات جو داخل کیی گیی ہین اونکی تعداد طاق ہوگی

(۶۸) اگر سب قیمتین مساوات ج (لا) = ۰ کی تحقیقی ہون تو تعداد مثبت قیمتون کی برابر ج (لا) کی تغیرات علامت کی تعداد کی ہی اور تعداد منفی قیمتون کی برابر ج (− لا) کے تغیرات علامت کی تعداد کے ہے

فرض کرو کہ مساوات ن درجہ کی ہی اور م تعداد مثبت قیمتون کی ہی اور مَ تعداد منفی قیمتون کی اور مو تعداد تغیرات علامت ج (لا) کی

اور مَو تعداد تغیرات علامت ج (-لا) کی ہو چونکہ تمام قیمتیں مساوات کی تحقیقی ہیں اسلئے م + مَ = ن اور م زیادہ مو سی اور مَ زیادہ مَو سی بموجب دفعہ ۴۳ کے نہیں ہو سکتا اسیواسطے مو + مَو = ن اسواسطے کہ مجموعہ مو اور مَو کا زیادہ ن سی نہیں ہو سکتا پس م + مَ = مو + مَو اور + م نہ زیادہ مو سی ہو سکتا ہی اور نہ کم مو سی ہو سکتا ہے اسلئے کہ اگر م کم ہو تو مَ بڑا مَو سی ہوتا ہی اور یہہ ناممکن پس م = مو اور مَ = مَو

(۶) فرض کرو کہ مو تعداد تغیرات علامت ج (لا) کی ہو اور مَو تعداد تغیرات علامت ج (-لا) کی ہوں تو مساوات ج (لا) = ۰ کی مو مثبت قیمتوں سی زیادہ قیمتیں نہیں ہو سکتی اور مَو سی زیادہ منفی قیمتیں نہیں ہو سکتی اور اسواسطے مو + مَو سی تحقیقی قیمتیں زیادہ نہیں ہو سکتیں اسی معلوم ہوا کہ اگر ن زیادہ مو + مَو سی ہو تو مساوات ج (لا) = ۰ کے کم از کم ن - مو - مَو خیالی قیمتیں ہونگیں دو دفعات آئندہ میں ہم بہت توضیح کے ساتھ اس بات کو بتلاوینگے کہ جب مساوات کامل نہ ہو تو اوسکی خیالی قیمتوں کی تعداد کیا ہوتی ہے

(۷) اگر کسی مساوات میں ایک صف ارقام کی موجود نہ ہو تو جتنی رقموں کی تعداد اس صف میں ہوگی اوتنی ہی کم از کم خیالی قیمتیں اوس مساوات کی ہونگیں

فرض کرو کہ ج (لا) میں درمیان $لا^{م}$ اور $لا^{م-۲ر-۱}$ کے ایک صف ۲ر رقموں کی موجود نہ ہو تو مساوات ج (لا) = ۰ کی کم از کم خیالی قیمتیں ۲ر ہونگیں فرض کرو کہ ا اور ب مثال $لا^{م}$ اور $لا^{م-۲ر-۱}$ کو ج (لا) میں تعبیر کریں اور ارقام جو موجود نہیں وہ مثال $ق_1$ اور $ق_2$ اور $ق_{۲ر}$ کے ساتھ داخل کیجائیں تو اس جملہ میں

$$ا\,لا^{م} + ق_1 لا^{م-1} + ق_2 لا^{م-2} + \cdots + ق_{۲ر} لا^{م-۲ر} + ب\,لا^{م-۲ر-۱}$$

میں تغیرات علامت کی تعداد مع تواترات علامت کی تعداد کی ۲ر + ۱ ہی اسکو یوں بیان کرو کہ اس جملہ کی تغیرات علامت کی تعداد اور اوس جملہ کی تغیرات علامت کی تعداد جسمیں علامات لا کی بدل جاوی ملکر برابر ۲ر + ۱ کی ہیں اب جو ارقام فرضیہ داخل کی ہیں اونکو ساقط کرو

تو اگر ا اور ب کی مختلف علامتین ہین تو ایک تغیر علامت کا ج (لا) مین ہوگا اور ج (−لا) مین کوئی تغیر نہ ہوگا اور اگر ا اور ب کی یکسان علامتین ہین تو ایک تغیر علامت ج (−لا) مین ہوگا اور ج (لا) مین کوئی تغیر نہ ہوگا اسواسطی دونو صورتون مین ۲ ر رقمون کی ساقط ہونے سے ج (لا) اور ج (− لا) مین نقصان ۲ ر تغیرات علامت کا واقع ہوتا ہے

اور یہہ قاعدہ تمام اصناف منقوص پر جنمین جفت ارقام ہون حاوی ہی پس اسی معلوم ہوا کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی اتنی خیالی قیمتین ہین جیسے کہ تعداد رقمون کی اس صنف منقوص مین سے ہے

(۱۷) اگر کسی مساوات مین ایک صنف طاق ارقام کی موجود نہ ہو پس اگر یہہ صنف منقوص ایسی دو رقمون کے درمیان واقع ہی کہ اونکی علامتین یکسان ہین تو مساوات کی خیالی قیمتون کی تعداد اس صنف کی ارقام کی تعداد سی بقدر ایک کے کم از کم زیادہ ہوگی اور اگر صنف منقوص ایسی دو رقمون کی درمیان واقع ہی کہ اونکی علامتین متضاد ہین تو مساوات کی خیالی قیمتون کی تعداد اس صنف کی ارقام کی تعداد سی کم از کم بقدر ایک کے کم ہوگی

فرض کرو کہ ج (لا) مین درمیان لا^{م} اور لا$^{م-۲ر-۲}$ کے ۲ ر + ۱ رقمین موجود نہین ہین اور لا^{م} اور لا$^{م-۲ر-۲}$ کی امثال ا اور ب علیحدہ علیحدہ ہین پس اگر ا اور ب کی یکسان علامت ہی تو مساوات ج (لا) = ۰ کی ۲ ر + ۲ خیالی قیمتین ہونگین اور اگر ا اور ب کی علامتین متضاد ہین تو مساوات ج (لا) = ۰ کی ۲ ر خیالی قیمتین ہونگین

فرض کرو کہ ارقام منقوصہ مثال ق۱ اور ق۲ اور ق۳ . . . داخل کیجائین تو جملہ

$$ا لا^{م} + ق_۱ لا^{م-۱} + ق_۲ لا^{م-۲} + \ldots + ق_{۲ر+۱} لا^{م-۲ر-۱} + ب لا^{م-۲ر-۲}$$

مین تعداد تغیرات علامات کی مع تعداد تغیر علامت کی ۲ ر + ۲ ہین یا اس مطلب کو اسطرح ادا کرو کہ اس جملہ کی تغیرات علامت کی تعداد اور اوس جملہ کی تغیرات علامت کی تعداد جسمین کہ لا کی علامت بدل دیجاتی ملکر ۲ ر + ۲ ہین اور جب ارقام فرضہ جو داخل کین نہین خارج کی جائین تو اگر ا اور ب کی یکسان علامتین ہین تو ج (لا) اور ج (− لا) مین کوئی تغیر علامت نہ ہوگا

اور اگر ا اور ب کی علامتین متضاد ہین تو ایک تغیر علامت ج (لا) اور ج (-لا) مین واقع ہوگا
اسواسطے ج (لا) مین ۲ر + ا رقمون کی ساقط ہونی سی ج (لا) اور ج (-لا) کی تعداد تغیرات
علامت مین سی ۲ر + ۲ کا نقصان عاید ہوتا ہی اگر صنف منقوص ارقام متحد العلامت کے درمیان واقع ہو
اور ۲ر تغیرات علامت کا نقصان عاید ہوتا ہی اگر صنف منقوص ارقام مختلف العلامت کی درمیان واقع ہو
اور یہہ قاعدہ تمام اصناف منقوصہ پر جنمین تعداد ارقام طاق ہون حاوی ہے
اسواسطے مساوات ج (لا) = ۰ کی کم از کم اوتنی قیمتین خیالی ہونگین جیسا کہ دعوی مین بیان کیا ہے

(۷۲) اب دفعہ ۱۷ کی یہہ ایک مثال ہی کہ اگر ج (لا) مین دو رقمین یکسان علامت کی ہون اور
اونکی درمیان ایک رقم مفقود ہو تو کم از کم اوسکی دو ناممکن قیمتین ہونگین اور اگر ایک رقم ایسی
دو رقمون کی درمیان مفقود ہو کہ اونکی علامتین متضاد ہون تو اوسی کچہہ نتیجہ ہم نہین نکال سکتی
کہ اوسکی خیالی قیمتین کتنی ہین

اب اس بات پر بہی غور کرنی چاہی کہ ارقام منقوصہ کی نسبت سی ج (لا) اور ج (-لا) کے
تغیرات علامت کی تعداد چہوٹی مساوات کی درجہ کی تعداد سی ہوتی ہی اور ان دونو تعدادون کا
حاصل تفریق جفت عدد ہوتا ہی

دفعات ۷۰ اور ۷۱ کی دو ممکن صورتون کی امتحان کرنی سی یہہ بات ظاہر معلوم ہوتی ہی
یعنی اگر طریقہ کتابت مقادیر کو موافق دفعہ ۶۹ کے اختیار کرین تو عدد ن - مو - مو ہمیشہ
ایک جفت عدد ہوتا ہی اور موافق دفعہ ۱۴ کی ہم کو اسی نتیجہ کی نکلنی کی پہلی سی توقع تہی

باب ششم مساوی قیمتین

(۷۳) بعض اوقات تو اس بات کی معلوم ہونیکی کہ مساوات مفروضہ مساوی قیمتین رکہتی ہے
ضرورت پڑتی ہی اور بعض اوقات اس بات کی جاننی سی آسانی ہوتی ہی چنانچہ یہہ بات
اس کتاب کے آگے مطالعہ کرنی سی معلوم ہو جائیگی اسیواسطے اب اس بات کو بیان کرینگی کہ کسطرح
مساوات کی متساوی قیمتون کو تحقیق کرتی ہین اور کسطرح اون اجزاء ضربی کو موافق

مساوی قیمتون کی مساوات مین ہوتی ہین خارج کرتے ہین اور کسطرح خارج کرکے مساوات کی تحویل ایسی مساوات کی طرف کرلیتی ہین کہ اوسکی قیمتین غیر مساوی ہوتی ہین اول ہم ایک خاصہ جملہ معلوم کی اول جملہ مشتقہ کی ثابت کرتے ہین

(۴۷) اگر ج (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہوا ور جَ (لا) اوسکا اول جملہ مشتقہ ہو تو یہہ ہوگا کہ

$$جَ(لا) = \frac{ج(لا)}{لا - ا} + \frac{ج(لا)}{لا - ب} + \frac{ج(لا)}{لا - ح} + \cdots + \frac{ج(لا)}{لا - ک}$$

اسمین ا اور ب اور ح . . . ک خیالی اور حقیقی قیمتین مساوات ج (لا) = ۰ کی ہین

وجہ اسکی یہہ ہی کہ ج (لا) مین لا کی اعلی قوت کا سر ع . فرض کرو تو بموجب دفعہ ۳۳ کے ہم کو یہہ منطابقہ حاصل ہوگا کہ

$$ج(لا) = ع.(لا - ا)(لا - ب)(لا - ح) \cdots (لا - ک) \qquad (۱)$$

ی + ی بجای لا کے رکھو تو

$$ج(ی + ی) = ع.(ی + ی - ا)(ی + ی - ب)(ی + ی - ح) \cdots (ی + ی - ک)$$

ہر طرف مساوات کو ایک سلسلہ مین بموافق قوائے متصاعدہ ی کی پھیلاؤ تو بموجب دفعہ ۱۲ کے دائین طرف کی یہہ صورت ہوگی کہ

$$ج(ی) + جَ(ی)ی + جً(ی)\frac{ی^۲}{۱ \times ۲} + \cdots$$

پس سری کا ج (ی) ہی اور اسیواسطے جَ (ی) برابر ہوگا بائین طرف مین ی کی سر کے یعنی

$$ع.(ی - ب)(ی - ح) \cdots (ی - ک) + ع.(ی - ا)(ی - ح) \cdots (ی - ک) + \cdots$$

یعنی $\frac{ج(ی)}{ی - ا} + \frac{ج(ی)}{ی - ب} + \frac{ج(ی)}{ی - ح} + \cdots + \frac{ج(ی)}{ی - ک}$

اور مقادیر متغیر کی واسطے ہر رمز کو کام مین لاسکتی ہین جسکی کچھہ ہی قیمت ہو اسلئی ی کو لا سی بدل تی ہین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$جَ(لا) = \frac{ج(لا)}{لا - ا} + \frac{ج(لا)}{لا - ب} + \frac{ج(لا)}{لا - ح} + \cdots + \frac{ج(لا)}{لا - ک} \qquad (۲)$$

اب یہہ نتیجہ اوس صورت مین بہی صحیح ہی کہ مقادیر ا و ب و ح . . . مین

ایک یا کئی برابر ا یا برابر ب کی ہو . . . اور علے ہذا القیاس

اب کل مین فرض کرو کہ ا ٹہیک ر دفعہ اور ب ٹہیک ص دفعہ اور ح ٹہیک ط دفعہ . . . واقع ہوتا ہے

(۱) کو اسطرح لکہہ سکتی ہین کہ

$$ج(لا) = ع.(لا - ا)^ر\ (لا - ب)^ص\ (لا - ح)^ط \ldots$$

اور (۲) کو اسطرح لکہہ سکتی ہین

$$جَ(لا) = \frac{ر\, ج(لا)}{لا - ا} + \frac{ص\, ج(لا)}{لا - ب} + \frac{ط\, ج(لا)}{لا - ح} + \ldots$$

(۴۵) اگر ج (لا) اور جَ (لا) کا کوئی وفق مشترک جسمین لا ملتف ہو ہوگا تو مساوات ج (لا) = ۰ کے برابر قیمتین ہونگین اور اگر وفق مشترک نہ ہوگا تو کوئی برابر قیمت نہین ہوگی

فرض کرو کہ ا و ب و ج . . . ک حقیقی یا خیالی قیمتین مساوات ج (لا) = ۰ کے ہین تو

$$ج(لا) = ع(لا - ا)\ (لا - ب)\ (لا - ج) \ldots (لا - ک)$$

$$\text{تو}\ جَ(لا) = ع.(لا - ب)\ (لا - ج) \ldots (لا - ک) + ع.(لا - ا)\ (لا - ح) \ldots (لا - ک) \ldots$$

اگر ا اور ب اور ح . . . ک تمام غیر مساوی قیمتین ہون تو اجزاء ضربی (لا - ا) و (لا - ب) لا - ج و . . . لا - ک مین کوئی جز ضربی جَ (لا) کو نہین تقسیم کریگا وجہ اسکی یہہ ہے کہ لا - ا ہر یک رقم جَ (لا) کو پورا تقسیم کرتا ہی مگر اول رقم کو نہین تقسیم کرتا اور علی ہذا القیاس اور اجزاء ضربی کی کیفیت ہی اور ان اجزاء ضربی مین سی حاصل ضرب بہی کتنی ایک اجزاء ضربی کا نہین پورا تقسیم کریگا اسی ثابت ہوا کہ اگر ج (لا) اور جَ (لا) کوئی وفق مشترک نہین رکہتا تو ج (لا) کوئی مساوی اجزاء ضربی نہین رکہتا پس معلوم ہوا کہ اگر ج (لا) اور جَ (لا) وفق مشترک رکہتی ہون تو ج (لا) کی سب اجزاء ضربی غیر مساوی بہی نہین ہوسکتی

دوم فرض کرو کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی برابر قیمتین ہین اور ر دفعہ ا اور ص دفعہ ب اور ط دفعہ ج اور علی ہذا القیاس واقع ہوتا ہے تو

$$جَ(لا) = ع.(لا - ا)^ر\ (لا - ب)^ص\ (لا - ج)^ط \ldots \left[\frac{ر}{لا - ا} + \frac{ص}{لا - ب} + \frac{ط}{لا - ج} + \ldots\right]$$

اس صورت مین جز ضربی (لا - ا)$^{م-1}$ (لا - ب)$^{ن-1}$ (لا - ج)$^{ع-1}$
جَ (لا) کی ہر رقم مین واقع ہوتا ہی پس اگر ج (لا) کے برابر اجزا ضربی ہون تو
ج (لا) اور جَ (لا) کا وفق مشترک ہوگا اسی معلوم ہوا کہ اگر ج (لا) اور جَ (لا) کا
وفق مشترک نہ ہو تو ج (لا) کے برابر اجزاء ضربی نہین ہونگے

(۷۶) اس مساوات پر خیال کرو کہ

ج (لا) = لا^{۴} - ۱۱ لا^{۳} + ۴۴ لا^{۲} - ۷۶ لا + ۴۸ = ۰

یہان جَ (لا) = ۴ لا^{۳} - ۳۳ لا^{۲} + ۸۸ لا - ۷۶

اب یہان یہہ دریافت ہوتا ہی کہ ج (لا) اور جَ (لا) کا وفق مشترک لا - ۲ ہی اسی ثابت ہوتا ہے کہ
(لا - ۲)^{۲} ایک جز ضربی ج (لا) کا ہے اور یہہ بھی دریافت ہوتا ہے کہ

ج (لا) = (لا - ۲)^{۲} (لا^{۲} - ۷ لا + ۱۲) = (لا - ۲)^{۲} (لا - ۳) (لا - ۴)

پس ج (لا) کے قیمتین ج (لا) = ۰ کی ۲ و ۲ و ۳ و ۴ ہین

اب پہر اس مساوات پر خیال کرو کہ

ج (لا) = ۲ لا^{۴} - ۱۲ لا^{۳} + ۱۹ لا^{۲} - ۶ لا + ۹ = ۰

یہان یہہ دریافت ہوگا کہ ج (لا) اور جَ (لا) وفق مشترک لا - ۳ رکھتی ہین اور

ج (لا) = (لا - ۳)^{۲} (۲ لا^{۲} + ۱) پس قیمتین ج (لا) = ۰ کی

۳ و ۳ و + $\sqrt{-\frac{1}{2}}$ و - $\sqrt{-\frac{1}{2}}$ ہین

(۷۷) دفعہ ۷۵ مین یہہ عبارت جو لکہی ہین کہ جسمین لا ملتف ہو اوس یہہ غرض ہی کہ ہم جز ضربی
ع پر کچہہ لحاظ نہین کرتی گو وہ بعض لحاظ ی وفق مشترک ج (لا) اور جَ (لا) کا خیال کیا جاسکتا ہی
اب چونکہ اول دفعہ ختم جملوں کے وفق مشترک کا ذکر چہیڑا ہی اسلئی مناسب معلوم ہوتا ہی کہ ہم کچہہ کیفیت
اس مضمون کی لکہین دستور کی بات ہی کہ وفق مشترک اور وفق اعظم مشترک کے مسائل الجبرا مین
بیان ہوتی ہین مگر یہہ کچہہ ضرور نہین کہ ابتداء تحصیل ریاضیہ مین ہی ان مسائل کو طلبا متعلم کرین

بلکہ وہ بعد دفعہ ۳۴۳ کے ما حصل کے خوب سمجھہ مین اتا ہی فرض کرو کہ
ج (لا) اور مج (لا) دو جملون صحیحہ ناطقہ لا کو تعبیر کرتا ہی تو ج (لا) اور مج (لا) کو اجزاء ضربی مین تحلیل کرسکتی ہین یعنی

ج (لا) = ع . (لا - ا۱) (لا - ا۲) (لا - ا۳) . . .

مج (لا) = ق . (لا - ب۱) (لا - ب۲) (لا - ب۳) . . .

اوران جملون مین سی ہر یک صرف ایک طور سی اجزاء ضربی مین تحلیل ہوسکتا ہے
اسی معلوم ہوا کہ جملہ لا کا اعلی درجہ کا دو نو ج (لا)
اور مج (لا) کو جو پورا تقسیم کریگا وہ حاصل ضرب اجزاء ضربی مشترک اول درجہ لا کا ہوگا
اور اسکو ہم ج (لا) اور مج (لا) کا دفق مشترک اعظم کہتے ہین
یہان ہم کچھہ لحاظ ع . اور ق . کا نہین کرتی اگر ہم چاہین تو عادی دفق اعظم اونکا اگر وہ دونو
عدد ہون نکال لین اور اگر وہ کسی اور مقدار مثلاً د کے جملے ہون تو ان د کی جملون کا دفق مشترک اعظم دریافت کرلین

(۷۸) فرض کرو کہ ج (لا) = ع . (لا - ا)^ر (لا - ب)^ص (لا - ج)^ط . . . تو
بموجب دفعہ ۷۵ کی دفق مشترک (لا - ا)^(ر-۱) (لا - ب)^(ص-۱) (لا - ج)^(ط-۱) . . .
ہوگا پس دفق مشترک اون تمام اجزاء ضربی مساویہ سی ملتف ہی جو ج (لا) مین واقع ہوتی ہے
اور ہر صورت مین قوت نما اپنی نظیر کی قوت نما سی ج (لا) مین بقدر ایک کم ہی اور ج (لا)
کو دفق مشترک ج (لا) اور مجَ (لا) پر تقسیم کرین تو خارج قسمت مین تمام اجزاء
جو ج (لا) مین واقع ہوتی ہین ملتف ہونگی اور ہر یک جز ضربی ایک دفعہ واقع ہوگا پس جو مساوات اس خارج قسمت
کو برابر صفر کی لکھنی سی حاصل ہوگی اوسمین کوئی قیمت مکرر مساوات ج (لا) = ۰ کی نہین واقع ہوگی

(۷۹) ہم دیکھتی ہین کہ اگر جز ضربی (لا - ا)^ر کا ج (لا) مین واقع ہو تو جز ضربی
(لا - ا)^(ر-۱) کا جَ (لا) مین واقع ہوگا اسلی مساوات جَ (لا) = ۰ کے
ر - ۱ قیمتین ہونگین جنمین سی ہر واحد مساوی ا کی ہوگی اب جُ (لا) اول جملہ مشتقہ جَ (لا)
کا ہی پس اگر ر - ۱ بڑا بہ نسبت ا کی ہو تو جَ (لا) اور جُ (لا) کا ایک دفق مشترک ہوگا

اور مساوات ج $^{''}$ (لا) = ۰ کی ر - ۲ ہونگین جنمین سی ہر ایک برابر ا کے ہوگا

پس اسطرح ہم ثابت کر سکتی ہین کہ (لا - ا)^{ر} ایک جزضربی ج (لا) کا ہو جو شنقه جملے

ج (لا) و ج$^{'}$ (لا) ۰ ۰ ۰ ۰ ج$^{ر-۱}$ (لا) سب کے سب لا = ا سے فنا ہو جائینگے

اور یہہ اسطرح بہی ثابت ہو سکتی ہین

فرض کرو کہ ج (لا) = (لا - ا)^{ر} مج (لا) اسمین مج (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا فرض کیا گیا ہے

جسمین جزضربی لا - ا داخل نہین ہے لا = ا + ی رکہو تو

ی^{ر} مج (ا + ی) = ج (ا + ی)

= ج (ا) + ج$^{'}$ (ا) ی + ۰ ۰ + ج$^{''}$ (ا) $\frac{ی^{۲}}{۲}$ + ۰ ۰ ۰ + ج^{ن} (ا) $\frac{ی^{ن}}{ن!}$ +

اب دائین طرف کا رکن ی^{ر} پر پورا تقسیم ہوتا ہی تو بائین طرف کا رکن بہی پورا ی^{ر} پر پورا تقسیم ہونا چاہیے

پس یہہ حاصل ہوگا کہ

ج (لا) = ۰ ج$^{'}$ (ا) = ۰ ۰ ۰ ۰ ج$^{ر-۱}$ (ا) = ۰

اور چونکہ دائین طرف کا رکن پورا ی کی کسی قوت پر جو ی^{ر} سی اعلی درجہ رکہتی ہو نہین تقسیم ہوتا

اسلئے ضرور ہی کہ بائین طرف کا رکن بہی ایسا ہو اسیواسطی ج$^{'}$ (ا) صفر نہین ہے پس

تعداد ارقام سلسلہ ج (لا) اور ج$^{'}$ (لا) اور ج$^{''}$ (لا) ۰ ۰ ۰ مین جو لا = ا کی ہونی سی فنا ہوتی ہین

اوتنی ہی جتنی لا - ا کا ج (لا) مین قوت نما ہے

مثلاً فرض کرو کہ

ج (لا) = لا^{۵} + ۲ لا^{۴} + ۳ لا^{۳} + ۷ لا^{۲} + ۸ لا + ۳

یہان یہہ دریافت ہوگا کہ سلسلہ ج (لا) و ج$^{'}$ (لا) ۰ ۰ ۰ مین

ج$^{'''}$ (لا) اول ہی لا = - ا سی فنا نہین ہوتا پس جزضربی (لا + ا)^{۳} کا ج (لا) مین

واقع ہوتا ہے اور یہہ دریافت ہوگا کہ ج (لا) = (لا + ا)^{۳} (لا^{۲} - لا + ۳)

(۸۰) ایک اور طریقہ مختصر مساوی قیمتون کی تحقیق کرنے کا ہم بیان کرتے ہین

اگر مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک سی زیادہ قیمتین برابر ای رکہتی ہو تو اسی یہہ نتیجہ نکلیگا کہ ا ج (لا) کو لا - ا پر تقسیم کرتی سی جو خارج قسمت نکلتا ہی وہ لا = ا سی معدوم ہوتا ہے پس موافق دفعہ ۷ کے .. خارج قسمت کی نکال لینے سی یہہ حاصل ہوگا کہ

ن ع. ا^ن-۱ + (ن - ۱) ع ا ا^ن-۲ + ... + ۲ ا ع ن - ۲ + ع ن - ۱ = ۰

یعنی جَ (لا) فنا ہو جائیگا جب لا = ا کے ہو

(۸۱) پس اسی یہہ معلوم ہوا کہ جب ہم کو مساوات ج (لا) = ۰ کی برابر قیمتون کا دریافت کرنا منظور خاطر ہو تو ہم اغاز سطح کرین کہ + و فق مشترک اعظم ج (لا) اور جَ (لا) کا دریافت کرین اور اس وفق مشترک اعظم کو برابر صفر کی لکہہ کر مساوات بنائین تو پہر ایک مساوات حل کرنی کی لئی ایسی حاصل ہو جائینگی کہ جسکی قیمتین وہ ہونگین جو مساوات ج (لا) = ۰ کی مکرر قیمتین ہین اور چونکہ یہہ وفق مشترک اعظم خود ایک پیچیدہ جملہ ہو سکتا ہی جسمین اجزا ضربیہ مساویہ ملتفت ہون اسواسطی یہہ فایدہ مند ہوگا کہ ہم عمل کو ایسی ضبط اور نظم کی ساتہہ کرین کہ قیمتین حتی الامکان تہوڑی سی محنت سی حاصل ہو جائین اور اب اس بات کو ہم لکہتی ہین

(۸۲) فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ ایک مساوات ہو جسکی برابر قیمتین ہون اور

ج (لا) = لا۱ لا۲^۲ لا۳^۳ لا۴^۴ ... لا م^م

اسمین حاصل ضربون تمام اجزا ضربی کا جو ایک دفعہ واقع ہوتی ہین لا۱ سی اور حاصل ضربون اجزا ضربی کا جو دو دفعہ واقع ہوتی ہین لا۲ سی اور حاصل ضربون اجزا ضربی کا جو تین دفعہ واقع ہوتے ہین لا۳ سی اور علی ہذا القیاس تعبیر ہوئی ہین اگر کوئی جز ضربی ج (لا) مین اوتنی دفعہ نہ ایا ہوگا جتنی دفعہ کہ بیان کیا گیا تو ایک یا کئی مقادیر

لا۱ و لا۲ و لا۳ ... مین سی برابر واحد کی ہو جائینگین

اب ج (لا) سی اول جملہ مشتقہ جَ (لا) کا حاصل کرو اور پہر وفق مشترک اعظم ج (لا) اور جَ (لا) کا حاصل کرو اور اس وفق اعظم کو ج۱ (لا) سے تعبیر کرو

$ج_۱(لا) = لا_۲ لا_۳^۲ لا_۴^۳ \ldots لا_م^{م-۱}$

اور پہر وفق اعظم $ج_۱(لا)$ اور اوسکی اول جملہ مشتقہ $ج_۱'(لا)$ کا حاصل کرو اور اوسکو $ج_۲(لا)$ سے تعبیر کرو

تو $ج_۲(لا) = لا_۳ لا_۴^۲ \ldots لا_م^{م-۲}$

اسیطرح متواتر عمل کئی جاؤ تو

$ج_۳(لا) = لا_۴ لا_۵^۲ \ldots لا_م^{م-۳}$

$ج_۴(لا) = لا_۵ \ldots لا_م^{م-۴}$

$ج_{م-۱}(لا) = لا_م$

$ج_م(لا) = ۱$

اب ایک نیا سلسلہ جملون کا اسطرح تبدیل کرو کہ سلسلہ

$ج(لا)$ و $ج_۱(لا)$ و $ج_۲(لا) \ldots ج_م(لا) \ldots$

ہر رقم کو $ج_{م-۱}(لا)$ تک اپنے ما قبل کی رقم پر تقسیم کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$\frac{ج(لا)}{ج_۱(لا)} = لا_۱ لا_۲ \ldots لا_م = مج_۱(لا)$ سے مقرر کرو

$\frac{ج_۱(لا)}{ج_۲(لا)} = لا_۲ \ldots لا_م = مج_۲(لا)$ سے مقرر کرو

$\frac{مج_{م-۲}(لا)}{مج_{م-۲}(لا)} = لا_{م-۱} لا_م = مج_{م-۱}(لا)$ سے مقرر کرو

$\frac{مج_{م-۱}(لا)}{مج_م(لا)} = لا_م = مج_م(لا)$ سے مقرر کرو

پس آخر کو یہہ حاصل ہوگا کہ

$\frac{مج_۱(لا)}{مج_۲(لا)} = لا_۱ ، \frac{مج_۲(لا)}{مج_۳(لا)} = لا_۲ \ldots \frac{مج_{م-۱}(لا)}{مج_م(لا)} = لا_{م-۱}$ اور $مج_م(لا) = لا_م$

غرض اجزاء ضربی $لا_۱$ اور $لا_۲ \ldots لا_م$ اب علیحدہ علیحدہ ہونگی اور مساواتون $لا_۱ = ۰$ اور $لا_۲ = ۰$ اور $\ldots لا_م = ۰$ کے حل کرنے سے قیمتین

مساوات مفروضہ ج (لا) کی حاصل ہوجائیگی اورکوئی قیمت لار = ۰ سے جو دریافت ہوگی وہ ردفعہ مساوات ج (لا) = ۰ مین واقع ہوگی

(۸۳) دفعہ گذشتہ کی عمل کی لئی یہہ مثال ہی فرض کرو کہ

ج (لا) = لا^۹ + لا^۸ − ۸ لا^۷ − ۹ لا^۶ + ۲۱ لا^۵ + ۹ لا^۴ − ۲۲ لا^۳ − ۴ لا + ۸

اب طریقہ کتابت جملوں کا دفعہ سابق کی موافق رہنی دین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ج۱ (لا) = لا^۴ + لا^۳ − ۳ لا^۲ − لا + ۲

ج۲ (لا) = لا − ۱

ج۳ (لا) = ۱

مج۱ (لا) = لا^۴ − ۵ لا^۲ + ۴

مج۲ (لا) = لا^۳ + ۲ لا^۲ − لا − ۲

مج۳ (لا) = لا − ۱

لا۱ = لا − ۱

لا۲ = لا^۲ + ۳ لا + ۲

لا۳ = لا − ۱

اسیواسطے ج (لا) = (لا − ۲) (لا^۲ + ۳ لا + ۲)^۲ (لا − ۱)^۳

= (لا − ۲) (لا + ۱)^۲ (لا + ۲)^۲ (لا − ۱)^۳

پس قیمتین مساوات ج (لا) = ۰ کی ۲ و −۱ و −۱ و −۲ و −۲ و ۱ و ۱ و ۱ ہین

(۸۴) جب ایک مساوات کی امثال سب کی سب مقادیر ناطقہ محدودہ ہونگے تو دفعہ ۸۲ مین لا۱ و لا۲ ۰ ۰ کی امثال ناطقہ محدودہ ہونگے اسی معلوم ہوا کہ اگر صرف ایک ہی قیمت مساوات کی قیمتون مین سی جسمین امثال مقادیر ناطقہ محدودہ ہون ردفعہ کرلین تو وہ مقدار ناطقہ محدودہ ہوگی کیونکہ وہ مساوات لار = ۰ نکلیگی جسمین مقادیر غیرناطقہ ملتف نہین ہین

اسی ہم یہہ نتیجہ نکالتی ہین کہ ایک مساوات تیسرے یا پانچوین درجہ کی جسمین امثال مقادیر ناطقہ محدودہ ہون اور اوسکی کوئی قیمت ناطقہ محدودہ نہ ہو تو اوسکی برابر کوئی قیمتین نہین ہونگین اور اگر مساوات چوتہی درجہ کی ہو اور اوسکی امثال ناطقہ محدودہ ہون اور کوئی قیمت اوسکی ناطقہ محدودہ نہ ہو اور پہر اوسکی برابر قیمتین ہون تو اوسکی دو قیمتین غیر ناطق ہونگین اور ہر یک دو دفعہ مکرر آئینگی پس اگر

ج (لا) = ۰ مساوات ہو تو ج (لا) ایک مجذور کامل ہوگا

ساتوان باب مساوات کی قیمتون کی حدود نمائی اور قیمتون کا جدا جدا کرنا

(۸۵) اب ہم چند مسائل لکہتی ہین جنسی یہہ دریافت ہوگا کہ مساوات کی تمام حقیقی قیمتین حدود نمائی کی درمیان واقع ہین اور پہر ہم اس بات کی تحقیق کرینگے کہ ہر قیمت کی جدا جدا حد نمائی دریافت کرنی کہان تک ممکن ہی اور ایسی مسایل کی لکہنی کا فائدہ یہہ ہی کہ چوتہی درجہ کی مساوات سی زیادہ درجہ کا مساوات عامہ کا حل جبریہ نہین حاصل ہو سکتا مگر ہم کو علم بعض خاص قیمتون کا تقریباً حاصل ہوتا ہی اور اوسکی استعانت سی ہم مساواتون کا اعداد مین حل کر سکتی ہین غرض ان حدود نمائی کی معلوم ہونی ہی تقریبی قیمتون کا علم ہوگا اور پہر اوسی مساواتون کا حل چوتہی درجہ سی زیادہ کا دریافت ہوگا

اس سارے باب مین ہر جگہ قیمت سی حقیقی قیمت سمجہی چاہئے اگر کہین اوسکی خلاف نہ بیان کیا گیا ہو تمام باب حقیقی قیمتون ہی سے متعلق ہے

(۸۶) جب ہم کہتی ہین کہ ایک خاص مقدار مساوات کی مثبت قیمتون کی اعلی حد نمائی ہی تو اوسکی مراد یہہ ہوتی ہی کوئی مثبت قیمت مساوات کی اوس مقدار سی زیادہ نہین ہو سکتی

(۸۷) جو مساوات اپنی سادہ صورت مین ہو اوسمین جو منفی امثال سب سے بڑا تعداد اً ہو اوسپر ایک زیادہ کرو تو حاصل جمع اس مساوات کی مثبت قیمتون کا اعلی حد نمائی ہوگا

فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ مساوات ن درجہ کی ہی اور تعداد اً ع سب سے بڑا منفی امثال ج (لا) مین ہی پس اگر ایک قیمت لا کی ایسی دریافت کیجا ہی کہ ج (لا) اس قیمت کی موافق اور اوسی تمام بڑی قیمتون کی موافق مثبت ہو تو وہ قیمت مساوات ج (لا) = ۰ کی مثبت

کی مثبت قیمتوں کی اعلیٰ حد غائی ہوگی اب اگر کوئی مثبت قیمت لا کی

$$لا^{ن} - ع\ (لا^{ن-1} + لا^{ن-2} + لا^{ن-3} + \ldots + لا + 1)$$

کو مثبت بنادی تو وہ بدرجہ اولی ج (لا) کو مثبت بنائیگی یعنی لا کی مثبت قیمت سی ج (لا) مثبت ہوتا ہی اگر $لا^{ن} - ع \frac{لا^{ن}-1}{لا-1}$ مثبت ہی اور جب یہہ مثبت ہی تو $لا^{ن} - 1 - ع \frac{لا^{ن}-1}{لا-1}$

بدرجہ اولی مثبت ہی یعنی اگر $(لا^{ن}-1)(1 - \frac{ع}{لا-1})$ مثبت ہی اور اخر جملہ مثبت ہوگا

اگر لا - ۱ بڑا ع سی ہی پس ج (لا) مثبت ہی اگر لا برابر ع + ۱ کے ہو

یا ع + ۱ اسی بڑا ہو یعنی ع + ۱ اعلیٰ حد غائی مساوات ج (لا) = ۰ کی مثبت قیمتوں کی ہے

(۸۸) اگر مساوات ج (لا) = ۰ مین بجای لا کی - لا مندرج کرین اور ن طاق عدد ہو تو ہر رقم کی ایسی علامت بدل دو کہ لا^ن کا سر + ۱ ہوا اور فرض کرو کہ اس صورت کی مساوات کا ق تعداد اُس سب سے بڑا منفی سر ہو تو ق + ۱ اعلیٰ حد غائی لا کی مثبت قیمتوں کی ہوگی

اور اسیواسطے - (ق + ۱) حد غائی لا کی منفی قیمتوں کی ہے

پس اسی معلوم ہوا کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی سب قیمتین درمیان ع + ۱ اور - (ق + ۱) کی واقع ہونگی

پس اگر مساوات مین تعداد اُس سب سے بڑی امثال بغیر لحاظ علامت کی م ہو تو مساوات کی تمام قیمتین درمیان م + ۱ و - (م + ۱) کے واقع ہونگین

(۸۹) اگر مساوات ن درجہ کی اپنی سادی صورت مین ہو اور عددی قیمت سب سے بڑی امثال کی ع ہو اور $لا^{ن-ر}$ سب سے بڑی درجہ کی قوت لا کی ہو جو منفی امثال رکھتی ہو تو $1 + \sqrt[ر]{ع}$

اعلیٰ حد غائی مثبت قیمتوں کی ہوگی

فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ مساوات مفروضہ ہو چونکہ تمام رقمیں ماقبل $لا^{ن-ر}$ کے مثبت امثال رکھتی ہین تو ج (لا) یقینی لا کی مثبت قیمت کے موافق مثبت ہوگا اگر

$$لا^{ن} - ع\ (لا^{ن-ر} + لا^{ن-ر-1} + \ldots + لا^{2} + لا + 1)$$

مثبت ہو یعنی اگر $لا^{ن} - ع \frac{لا^{ن-ر+1}-1}{لا-1}$ مثبت ہو پس لا بڑا واحد سی فرض کرو

تو ج (لا) مثبت بدرجہ اولی ہوگا اگر $لا^ن - ع \frac{لا^ن - ۱}{لا - ۱}$ مثبت ہو یعنی اگر $لا^ن (لا - ۱) - ع لا^ن + ۱$ مثبت ہو یعنی اگر $لا^{ن-۱} (لا - ۱) - ع$ مثبت ہو یعنی اگر $(لا - ۱)$ برابر یا بڑا ع سی ہو اسی معلوم ہوا کہ اگر $لا = ۱ + ع$ یا کوئی بڑی قیمت اوسکی ہو تو ج (لا) مثبت ہے یعنی

$۱ + ع$ اعلی حد غائی مثبت قیمتون کی مساوات ج (لا) = ۰ مین ہے

(۹۰) اگر مساوات کی سب امثال منفیہ مین سی ہر یک مثبت بنا کر اوسکی ماقبل کی مثال مثبتہ کے مجموعہ پر تقسیم کرین تو جو کسر اسطرح سی سب سے بڑی ہوگی اوسپر ایک زیادہ کرنی سی مثبت قیمتون کی حد غائی حاصل ہوگی

فرض کرو کہ مساوات ج (لا) = ۰ ہو اسمین ج (لا)

$ع_۰ لا^ن + ع_۱ لا^{ن-۱} + ع_۲ لا^{ن-۲} - ع_۳ لا^{ن-۳} + ع_۴ لا^{ن-۴} + \ldots - ع_ر لا^{ن-ر} + \ldots + ع_ن$

تعبیر کرتا ہے اب ہم کو معلوم ہے کہ

$لا^م = (لا - ۱) (لا^{م-۱} + لا^{م-۲} + \ldots + لا + ۱) + ۱$

مساوات کے ہر رقم مثبت کو اس صورت قانونیہ کی موافق تبدیل کر کی لکھو اور باقی ارقام کو بدستور رہنے دو تو ج (لا) کی یہہ صورت ہو جائیگی

$ع_۰ (لا - ۱) لا^{ن-۱} + ع_۰ (لا - ۱) لا^{ن-۲} + ع_۰ (لا - ۱) لا^{ن-۳} + \ldots + ع_۰ (لا - ۱) + ع_۰$

$+ ع_۱ (لا - ۱) لا^{ن-۲} + ع_۱ (لا - ۱) لا^{ن-۳} + \ldots + ع_۱ (لا - ۱) + ع_۱$

$+ ع_۲ (لا - ۱) لا^{ن-۳} + \ldots + ع_۲ (لا - ۱) + ع_۲$

$- ع_۳ لا^{ن-۳}$

اب اس جملہ کی عمودی سطرون کو دیکھو کہ جہان امثال منفیہ نہین ہین وہان سطر عمودی کی قیمت مثبت ہی اگر لا بڑا ۱ سی ہو مگر اوس سطر عمودی مین کہ امثال منفیہ واقع ہون ہم کو یہہ حاصل ہو جانا چاہیئے کہ

$(ع_۰ + ع_۱ + ع_۲) (لا - ۱)$ بڑا $ع_۳$ سے ہو

$(ع_۰ + ع_۱ + ع_۲ + \ldots + ع_{ر-۱}) (لا - ۱)$ بڑا $ع_ر$ سے ہو

اسواسطی چاہی کہ لا بڑا ہو بہ نسبت $\frac{ع_۲}{ع_۰+ع_۱+ع_۲}$ + ۱ . . . کی اور

بڑا بہ نسبت $\frac{ع_ر}{ع_۰+ع_۱+ع_۲+ . . . +ع_{ر-۱}}$ + ۱ . . . کی ہو اسیواسطی اگر لا

ان متصلہ جملون مین سی سب سی بڑی جملہ کی برابر فرض کیا جاے تو وہ قیمت لا کی اور اوسی ہر ایک بڑی قیمت

ح (لا) کو مثبت بنائیگی یعنی ان جملون مین سی سب سے بڑا جملہ اعلی حد غائی مساوات ح (لا) =

کی مثبت قیمتون کی ہے

(۹۱) اب ان قاعدون کی توضیح دو مثالون سی کرتی ہین اول یہہ مساوات لو

$$لا^۵ + ۸ لا^۴ - ۱۴ لا^۳ - ۵۳ لا^۲ + ۵۶ لا - ۱۸ = ۰$$

بموجب دفعہ ۸۷ کی ۵۳ + ۱ یعنی ۵۴ اعلی حد غائی مثبت قیمتون کی ہی اور بموجب دفعہ

۸۹ کی اس سبب سے کہ لا = ۵ اور ر = ۲ تو حد غائی ۱ + ۵۳^{۱/۲} ہی یعنی ۹ حد غائی ہے

اور بموجب دفعہ ۹۰ کی ان جملون $\frac{۱۴}{۱+۸}$ + ۱ اور $\frac{۵۳}{۱+۸}$ + ۱ اور $\frac{۱۸}{۵۶+۸+۱}$ + ۱

مین سب سے بڑا جملہ لینا چاہئی یعنی $\frac{۵۳}{۹}$ + ۱ اسی معلوم ہوا کہ حد غائی ۷ ہے

اب یہہ مساوات لو کہ

$$لا^۵ - ۵ لا^۴ - ۱۳ لا^۳ + ۲ لا^۲ + لا - ۷۰ = ۰$$

یہان دفعات ۸۷ اور ۸۹ سی ۷۰ + ۱ حد غائی ہی اور بموجب دفعہ ۹۰ کے $\frac{۷۰}{۵}$ + ۱

حاصل ہوتا ہے اسی معلوم ہوا کہ ۱۹ حد غائی ہے

پس دونو مثالون مین دفعہ ۹۰ سی اعلی حد غائی سب سے چھوٹی معلوم ہوتی ہی اب یہہ بات آسانی

معلوم ہوتی ہی کہ دفعہ ۸۹ سی بہ نسبت دفعہ ۸۷ کی چھوٹی حد غائی معلوم ہوتی ہی مگر ر = ۱ اسکے

صورت مستثنی ہی اسمین دونو حدود غائی مین تطبیق ہوجاتی ہی علی العموم دفعہ ۸۹ زیادہ کام

دیتی ہے جب اکثر مثبت امثال شمال منفیہ اول کے واقع ہون جسکی سبب سے ر بڑا ہوجاے

اور دفعہ ۹۰ سی ہمیشہ بہ نسبت دفعہ ۸۷ کی چھوٹی حد غائی معلوم ہوتی ہی مگر یہہ صورت مستثنی ہی کہ

سب سے بڑی منفی امثال کی ماقبل ایک ہی مثبت امثال ہو یعنی اول ہی رقم ہو اس صورت مین

دونو حدود میں تطبیق ہوجاتی ہی علی العموم دفعہ ۹۰ وہان زیادہ کام دیتی ہی کہ مثال مشتبہ یا قبل امثال منفی کی واقع ہون

(۹۲) بعض حکمتین ایسی ہین کہ ہم اگر قواعد عامہ کی نسبت اعلی حد غائی چہوٹی دریافت کر لیتی ہین دفعہ گذشتہ کی اول مثال پر خیال کرو اب یہان مساوات ج (لا) = ۰ کی مثبت قیمتوں کی حد اعلی دریافت کرنی ہی اسمین ج (لا) کو اسطرح لکہہ سکتی ہین کہ

$$\text{لا}^{۲}(\text{لا}^{۳} - ۵۳) + ۸\,\text{لا}^{۲}\left(\text{لا} - \frac{۱۴}{۸}\right) + ۵۶\left(\text{لا} - \frac{۹}{۲۸}\right)$$

اب اگر لا برابر ۴ کی یا اوسی کسی بڑی قیمت کی برابر ہو تو خطوط وحدانی کی مابین جملی سب مثبت ہین اور ایسی ہی ج (لا) مثبت ہی پس ۴ حد غائی مساوات ج (لا) = ۰ کے مثبت قیمتوں کی ہے

اب دفعہ مذکور کی دوسرے مثال پر خیال کرو کہ اوسمین ج (لا) کو اسطرح لکہہ سکتے ہین کہ

$$\text{لا}^{۳}(\text{لا}^{۲} - ۵\,\text{لا} - ۱۳) + ۲\,\text{لا}^{۲} + \text{لا} - ۷$$

اب دفعہ ۸۷ کی امداد سی ہم دیکہتی ہین کہ $\text{لا}^{۲} - ۵\,\text{لا} - ۱۳$ مثبت ہی اگر $\text{لا} = ۱۳ + ۱$ یا اسی بڑی قیمت کی پس مساوات ج (لا) = ۰ کی مثبت قیمتوں کی ۱۴ اعلی حد غائی ہے

(۹۳) اب بہت آسانی سی مساوات کی مثبت قیمتوں کی حد غائی دریافت کر سکتی ہین یعنی ایسا عدد دریافت کر سکتی ہین کہ وہ کسی مثبت قیمت سی مساوات کی بڑا نہ ہو

مساوات کو ہیئت بدل کر ایسی مساوات بناؤ کہ جسکی قیمتین متکافی مساوات مفروضہ کے جذر اجدا ہون

اب اس بدلی ہوئی مساوات کی مثبت قیمتوں کی اعلی حد غائی مساوات مفروضہ کی مثبت قیمتوں کے ادنی حد غائی ہوگی مثلاً فرض کرو کہ مساوات مفروضہ یہہ ہو

$$\text{لا}^{ن} + ع_{۱}\,\text{لا}^{ن-۱} + ع_{۲}\,\text{لا}^{ن-۲} + \cdots + ع_{ن-۱}\,\text{لا} + ع_{ن} = ۰$$

لا کی جگہہ $\frac{۱}{ی}$ رکہو اور یⁿ مین ضرب دو اور عن پر تقسیم کرو تو بدلی ہوئی مساوات یہہ حاصل ہوگی کہ

$$ی^{ن} + \frac{ع_{ن-۱}}{ع_{ن}}\,ی^{ن-۱} + \cdots + \frac{ع_{۲}}{ع_{ن}}\,ی^{۲} + \frac{ع_{۱}}{ع_{ن}}\,ی + \frac{۱}{ع_{ن}} = ۰$$

اب دفعات گذشتہ میں سی کسی ایک دفعہ کی موافق اعلی حد غائی اس مساوات کی دریافت کرو اور اوسکول سی تعبیر کرو تو $\frac{1}{\text{ل}}$ ادنی حد غائی مساوات مفروضہ کی مثبت قیمتوں کی ہوگی

اب فرض کرو کہ ہم دفعہ ۸۷ کی موافق اعلی حد غائی دریافت کرتی ہیں اور $\frac{\text{ع}_\text{ر}}{\text{ع}_\text{ن}}$ کو سب سے بڑا امثال منفی تعداد اً بدلی ہوئی مساوات میں مانتی ہیں تو $1 - \frac{\text{ع}_\text{ر}}{\text{ع}_\text{ن}}$ اعلی حد غائی بدلی ہوئی مساوات کی مثبت قیمتوں کی ہوگی اور اسیواسطی مساوات مفروضہ کی مثبت قیمتوں کی ادنی حد غائی $\frac{\text{ع}_\text{ن}}{\text{ع}_\text{ن} - \text{ع}_\text{ر}}$ ہے

یہاں $\text{ع}_\text{ن}$ واقعی تعداداً سب سے بڑا امثال مساوات مفروضہ میں ہی جو $\text{ع}_\text{ن}$ سے علامت میں اختلاف رکہتا ہے

مثلاً دفعہ ۹۱ میں $\text{ع}_\text{ن} = -18$ اور $\text{ع}_\text{ر} = 56$ پس $\frac{-18}{-18-56}$ یعنی $\frac{18}{74}$ یعنی مساوات مفروضہ کی مثبت قیمتوں کی حد غائی $\frac{18}{74}$ ہے

(۹۴) مساوات ج (لا) = ۰ کی منفی قیمتوں کی حدود غائی دریافت کرو لا کی جگہہ − ی لکہو اور اسطرح جو بدلی ہوئی مساوات حاصل ہو اوسکی مثبت قیمتوں کی حدود غائی دریافت کرو تو یہہ حدود غائی جنکی علامتیں بدلی ہوئی ہیں مساوات مفروضہ کی منفی قیمتوں کی حدود غائی ہونگیں مثلاً مساوات

$$\text{لا}^5 - 7\text{لا}^4 - 15\text{لا}^3 + 3\text{لا}^2 + 4\text{لا} + 48 = 0$$

میں − ی کو بجای لا کے رکہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{ی}^5 + 7\text{ی}^4 - 15\text{ی}^3 - 3\text{ی}^2 + 4\text{ی} - 48 = 0$$

بموجب دفعہ ۹۱ کے $1 + \frac{48}{1+7+48}$ یعنی ۱۵ اعلی حد غائی مثبت قیمتوں کی ہی اور بموجب دفعہ ۹۳ کے $\frac{48}{48+7}$ ادنی حد غائی منفی قیمتوں کی ہی پس مساوات مفروضہ کی قیمت منفیہ درمیان − ۱۵ اور $-\frac{48}{55}$ کے واقع ہونگیں

(۹۵) اب ہم ایک اور ترکیب مساوات کی مثبت قیمتون کی اعلی حد غائی کی دریافت کرنی کی لکہتی ہین اور اوسکو نیوٹن صاحب کی ترکیب کہتی ہین

فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ مساوات کو تعبیر کرتا ہی جسپر ہم اب بحث کرتی ہین لا کی جگہہ صہ + ی لکہو اور ح (صہ + ی) کو بموجب دفعہ ۱۲ کی پہلاؤ تو مساوات کی صورت یہہ ہوجائیگی کہ

ح (صہ) + ی حَ (صہ) + ی۲/۲ حً۲ (صہ) + ۰۰۰ + ین/|ن ح ن (صہ) = ۰

اب فرض کرو کہ صہ مثبت ہی اور اوسکی قیمت ایسی ہی کہ ح (صہ) اور حَ (صہ) اور حً (صہ) ۰۰ ح ن (صہ) سب مثبت ہین تو ی کی کوئی مثبت قیمت اوپر کی مساوات کی شرائط کو پورا نہین کریگی لیکن ی = لا - صہ چونکہ ی مثبت نہین ہوسکتا تو لا بڑا صہ سے نہین ہوسکتا پس صہ ایک اعلی حد غائی مساوات ح (لا) = ۰ کی مثبت قیمتون کی ہی پس اگر مساوات مفروضہ اپنی ساوہی صورت مین ح ن (صہ) ہی تو ضرور مثبت ہوگی اور برابر |ن ہوگی

(۹۶) مثلاً یہہ مساوات لو کہ

لا۵ + لا۴ - ۴ لا۳ - ۶ لا۲ - ۰۰ ۷ لا + ۰۰ ۵ = ۰

یہان ح (صہ) = صہ۵ + صہ۴ - ۴ صہ۳ - ۶ صہ۲ + ۰۰ ۷ صہ + ۰۰ ۵

حَ (صہ) = ۵ صہ۴ + ۴ صہ۳ - ۱۲ صہ۲ - ۱۲ صہ + ۰۰ ۷

۱/۲ حً (صہ) = ۱۰ صہ۳ + ۶ صہ۲ - ۱۲ صہ - ۶

۱/|۳ حً' (صہ) = ۱۰ صہ۲ + ۴ صہ - ۴

۱/|۴ ح'''' (صہ) = ۵ صہ + ۱

اب ہمین آسانی ہی کہ آخر جملہ صہ سی شروع کرین اور باقاعدہ آگے بڑہین کوئی سی مثبت قیمت صہ کی ح'''' (صہ) کو مثبت بناتی ہی صہ = ۱ کے حً' (صہ) کو مثبت بناتی ہے صہ = ۲ کے حً (صہ) کو مثبت بناتی ہی اور صہ = ۴ کے حَ (صہ) کو مثبت بناتی ہے اور صہ = ۵ کے ح (صہ) کو مثبت بناتی ہی تو اسی یہہ دریافت ہوتا ہی کہ صہ = ۵

سب صہ کے جملوں کو مثبت بناتی ہی اسواسطی مساوات مفروضہ کی مثبت جملوں کی اعلی حد غائی صہ ہے
اس بات پر بہی غور کرنی چاہئی کہ جس ترکیب کے موافق ہم آخر جملہ سی چلتی ہیں اور صہ کی قیمت مناسب
اوپر کی جملوں میں بڑہاتی جاتی ہیں اوسمیں یہہ کچہہ ضرور نہیں کہ ہم نیچی کی جملوں کو جنکی علامت کا پہلی فیصلہ
ہو چکا ہی اونکو دوبارہ پہر اس قیمت صہ کی موافق جانچیں مثلاً فرض کرو کہ ہم نی یہہ تحقیق کر لیا ہے کہ
صہ کی خاص قیمت ا تمام جملوں کو ح″ (لا) تک مثبت بناتی ہی تو صہ کی کوئی بڑی قیمت رکہو مثلاً
ا + ب تو اس سبب سے کہ

$$ح'' (ا + ب) = ح'' (ا) + ب ح''' (ا) + \frac{ب^2}{1 \times 2} ح'''' (ا) + \cdots$$

میں تمام رقمیں دائیں طرف مثبت بموجب فرض کی ہیں تو ح″ (ا + ب) بہی مثبت ہی پس مثال گذشتہ
میں جب یہہ دریافت ہو گیا کہ صہ = ۵ کی ح (صہ) کو مثبت کرتا ہی تو اسکی اب ضرورت نہیں رہی کہ
ہم اور جملوں کو بہی دریافت کریں کہ وہ مثبت بناتا ہی یا نہیں کیونکہ اس ترکیب ہی سی ہم کو یقین ہو جاتا ہے
کہ وہ مثبت بناتا ہے

(۹۷) اب ہم نی یہہ بیان کر دیا کہ مساوات کی تمام مثبت حقیقی قیمتوں کی حدود غائی کسطرح
اور مساوات کی تمام منفی حقیقی قیمتوں کی حدود غائی کیونکر دریافت کرتی ہیں اب ہم بعض مسائل
لکہتی ہیں جنسی کہ مقام قیمتوں کا جو مفرداً یا مجموعاً لیجائیں معلوم ہوگا پوری تحقیقات اس مضمون
کی سٹرم کے ضابطہ میں آگی لکہی ہے

(۹۸) اگر ہم ح (لا) میں لا کی جگہہ متواتر دو مقداریں مندرج کریں اور ان مقداروں کے درمیان مساوات
ح (لا) = ۰ کی قیمتیں جنکا شمار طاق ہو واقع ہوں تو ہم کو نتایج مختلف العلامت حاصل ہونگی
اور اگر ہم ح (لا) میں لا کی جگہ متواتر دو مقداریں مندرج کریں جنکی درمیان مساوات ح (لا) = ۰
کی کوئی قیمت نہ واقع ہو اور جو واقع ہوں تو اونکا شمار جفت ہو تو نتایج متحد العلامت حاصل ہونگے
فرض کرو کہ لر اور لو دو مقداریں ہوں جنمیں لر بڑا ہو اور ا و ب و ح ... ک تمام حقیقی قیمتیں
مساوات ح (لا) = ۰ کی ہوں جو درمیان لر اور لو کی واقع ہیں تو بموجب دفعہ ۸۳ کی یہہ حاصل ہوگا کہ

ج(لا) = (لا ـ ا) (لا ـ ب) (لا ـ س) . . . (لا ـ ک) مر (لا)

اسمین مر لا ایک جملہ ایسا ہی جو اجزاء ضربی درجہ دوم کی حاصل ضرب سی بنا ہی جو کبھی اپنی علامت نہین بدلتی یا اصلی اجزاء ضربی سی جو اپنی علامت کبھی ایسی حالت مین نہین بدلتی کہ لا درمیان لر اور لو کے واقع ہو

لر اور لو کو بجائی لا کے متواتر رکہو تو

ج (لر) = (لر ـ ا) (لر ـ ب) (لر ـ س) . . . (لر ـ ک) مر (لر)

ح (لو) = (لو ـ ا) (لو ـ ب) (لو ـ س) . . . (لو ـ ک) مر (لو)

اب تمام اجزاء ضربی لر ـ ا اور لر ـ ب اور لر ـ ح . . . لر ـ ک مثبت ہین اور تمام اجزاء ضربی لو ـ ا اور لو ـ ب اور لو ـ ح . . . لو ـ ک منفی ہین اور مر (لر) اور مر (لو) کی ایک ہی علامت ہی اسواسطے ح (لو) اور ح (لو) متحد العلامت ہونگے اگر ا و ب و ح . . . ک قیمتون کا شمار جفت ہو اور مختلف العلامت ہونگی اگر قیمتون کا شمار طاق ہو

(۹۹) اسی معلوم ہوا کہ ح (لا) مین بجای لا کی دو مقدار متواتر رکہین اور اونسی نتایج مختلف العلامت پیدا ہون تو ان دو مقدارون کی درمیان مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتین جنکا شمار طاق ہو واقع ہونگین اور اگر اونسی نتایج متحد العلامت پیدا ہون تو ان دو مقدارون کے درمیان مساوات مذکور کی کوئی قیمت نہین واقع ہوگی یا ایسی قیمتین واقع ہونگین جنکا شمار جفت ہو

اس نتیجہ کی خاص صورت دفعہ ۱۹ کا نتیجہ ہے

(۱۰۰) اس بات پر بہی خیال کرنا چاہیئی کہ دفعہ ۹۸ کے اثبات مین یہہ ضرور نہین ہے کہ قیمتین ا و ب و ح . . . ک سب غیر مساوی ہون اس بات کو یاد رکہنا چاہیئی کہ جو قیمت م دفعہ اتی ہو اوسکو م قیمتین شمار کرتے ہین

ہم لکہہ اکی ہین کہ اگر ح (لر) اور ح (لو) متحد العلامت ہون تو مساوات ج (لا) = ۰ کی گیا تو کوئی قیمت درمیان لر اور لو کے نہین واقع ہوگی یا واقع ہونگین تو اونکا شمار جفت ہوگا

اس باب کے اوپر کی دفعات مین بعض اوقات ہم اس قسم کی دلیل کو کام مین لاتی ہین کہ لو یا کوئی اور بڑی
اوسی قیمت لا کی ج (لا) کو مثبت بناتی ہی اسواسطی مساوات ج (لا) = ۰ کی مثبت قیمتون کی
اعلی حد غائی لو ہی اس بات کو خوب خیال مین رکھنا چاہیے کہ جہان ہم نی یہہ لکہا ہی کہ ج (لا) کو مثبت بناتی ہی
تو اوسی مطلب ہمارا یہہ ہی کہ ج (لا) کو مثبت مقدار بناتی ہی اوسکو صفر نہین بناتی مثلاً اگر
ج (لا) = (لا−۲)² (لا−۱) مین لا بڑا بہ نسبت واحد کی ہو تو ج (لا) منفی نہین ہونے کا
لیکن اسی یہہ نتیجہ نہین نکالنا چاہئی کہ واحد اعلی حد غائی مثبت قیمتون کی ہی اسواسطے کہ ۲ ایک قیمت موجود ہے،
پس اگر ہم کو صرف یہہ معلوم ہو کہ کوئی قیمت لا کی بڑی بہ نسبت لو کی ج (لا) کو منفی نہین بنا سکتی
تو اوسی یہہ نتیجہ نہین نکالنا چاہئی کہ لو سی کوئی بڑی قیمت نہین ہی مگر اوسی یہہ نتیجہ نکالنا چاہئی
کہ کیا لو کوئی قیمت نہین اور اگر لو ایک قیمت یا کئی قیمتین ہین تو وہ جفت مرتبہ مکرر آئی ہین

(۱۰۱) اب ہم ایک بڑا مسئلہ یہہ لکہتی ہین کہ مساوات ج (لا) = ۰ اور جَ (لا) = ۰
کی قیمتون مین کیا ارتباطات ہین یہان جَ (لا) اول جملہ مشتقہ ج (لا) کا ہی اس مسئلہ کو کبھی
رول کا ضابطہ بہی کہتی ہین کیونکہ سب سے پہلی اس مسئلہ کا موجد تہا

(۱۰۲) مساوات جَ (لا) = ۰ کی ایک حقیقی قیمت مساوات ج (لا) = ۰ کی دو متصل کی حقیقی قیمتون کے
درمیان واقع ہوتی ہے

فرض کرو کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی حقیقی قیمتین بلحاظ مقدار کی بہ ترتیب تصاعیدی جبر مقابلہ کے
موافق لکہی گئی ہین اور ا د ب و س . . ک سی تعبیر ہوتی ہین اور فرض کرو کہ سر (لا) حاصل ضرب
درجہ دوم کی اجزا ضربی کا　　موافق خیالی قیمتون مساوات ج (لا) = ۰ کے ایسا ہے
کہ سر (لا) اپنی علامت نہین بدل سکتا پس بموجب دفعہ ۴۳ کے

ج (لا) = (لا − ا) (لا − ب) (لا − س) . . . (لا − ک) سر (لا)

اس مطابقہ مین لا کی جگہہ ء + ی رکہو تو

ج (ء + ی) = (ء + ی − ا) (ء + ی − ب) . . . (ء + ی − ک) سر (ء + ی)

اب فرض کرو کہ اس متطابقہ کی ہر رکن کی صورت منفصلہ قوا متصاعدہ مین لکھی جاوی تو امثال ی کی دائین طرف حَ (ی) ہوگا دفعہ ۱۲ کو دیکھو اور مثال ی کی بائین طرف

[(ی ـ ب) (ی ـ س) . . . (ی ـ ک) + (ی ـ ب) (ی ـ س) . . . (ی ـ ک) + . .] سر (ی)

+ (ی ـ ا) (ی ـ ب) (ی ـ س) . . . (ی ـ ک) سَر (ی)

ہوگا ان ی کی امثال کو برابر لکھو اور ی کو لا سی بدل کر متطابقہ مین لکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

حَ (لا) = [(لا ـ ب) (لا ـ س) . . (لا ـ ک) + (لا ـ ا) (لا ـ س) ـ (لا ـ ک)] سرلا

+ (لا ـ ا) (لا ـ ب) (لا ـ س) . . (لا ـ ک) سَرلا

اب متواتر ا د ب و س . . ک کو لا کی جگہہ رکہو تو آخر رقم متطابقہ کی بائین طرف کی ہر صورت مین معدوم ہوجائیگی اور اسیواسطی علامتین حَ (ا) اور حَ (ب) اور حَ (س)

. . حَ (ک) کی وہی علامتین ہین جو (ا ـ ب) (ا ـ س) . . . (ا ـ ک) و (ب ـ ا) (ب ـ س) . . . (ب ـ ک)

. . . (ک ـ ا) (ک ـ ب) (ک ـ س) . . . اور یہہ علامتین علی التبادل مثبت اور منفی ہین یعنی ایک مثبت دوسری منفی پہر تیسری مثبت اور چوتہی منفی اور علی ہذا القیاس اسواسطے کہ اول جملہ کا کوئی جز ضربی منفی نہین ہی اور دوسری جملہ کا ایک جز ضربی منفی ہی اور تیسری جملہ مین دو اجزا ضربی منفی ہین اور علی ہذا القیاس اسی معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۹۹ کی مساوات حَ (لا) = ۰ کی قیمتین جنکا شمار طاق ہو مساوات ح (لا) = ۰ کے متصل کی قیمتون کے درمیان واقع ہین

(۱۰۳) دفعہ گذشتہ مین قیمتین ا و ب و س . . . ک سب کے سب باہم غیر متساوی ہین اب فرض کرو کہ قیمت ا مکرر ر دفعہ اور قیمت ب مکرر ص دفعہ اور قیمت س مکرر ط دفعہ اور علی ہذا القیاس سے ہی تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ح (لا) = (لا ـ ا)^ر (لا ـ ب)^ص (لا ـ س)^ط . . . سر (لا)

حَ (لا) = سر (لا) [ر (لا ـ ا)^(ر-۱) (لا ـ ب)^ص (لا ـ س)^ط . . . + ص (لا ـ ا) (لا ـ ب)^(ص-۱) (لا ـ س)^ط . . . + . . .

+ (لا ـ ا)^ر (لا ـ ب)^ص (لا ـ س)^ط . . . سَر (لا)

فرض کرو ح١ (لا) وفق اعظم ح (لا) اور حَ (لا) کا ہی یعنی یہہ فرض کرو کہ

$$\text{ح}_1(\text{لا}) = (\text{لا} - \text{ا})^{\text{ر}-1}(\text{لا} - \text{ب})^{\text{ص}-1}(\text{لا} - \text{س})^{\text{ط}-1} \ldots$$

$$\text{تو } \frac{\text{حَ}(\text{لا})}{\text{ح}_1(\text{لا})} = \text{سر}(\text{لا}) \left[\text{ر}(\text{لا}-\text{ب})(\text{لا}-\text{س})\ldots + \text{ص}(\text{لا}-\text{ا})(\text{لا}-\text{س})\ldots + \ldots \right]$$

$$+ (\text{لا}-\text{ا})(\text{لا}-\text{ب})(\text{لا}-\text{س})\ldots \text{سرَ}(\text{لا})$$

اس جملہ کو ح (لا) تعبیر کرو تو موافق سابق کی یہہ تحقیق ہوگا کہ مساوات ح (لا) = ٠ کی ایک قیمتین جنکا شمار طاق ہو ا اور ب کی درمیان اور دوسرے قیمتین جنکا شمار طاق ہو ب اور س کی درمیان اور علی ہذالقیاس واقع ہین اور چونکہ حَ (لا) = ح١ (لا) ح (لا) ہم کو حاصل ہی تو جسوقت ح (لا) معدوم ہوگا تو حَ (لا) بہی معدوم ہوگا پس مساوات حَ (لا) = ٠ کی قیمتین جنکی تعداد طاق ہو مساوات ح (لا) = ٠ کی ہر دو متصل کی غیر مساوی قیمتوں کی درمیان واقع ہین

مساوات ح (لا) = ٠ کی مساوی قیمتوں کی نسبت ہم یہہ جانتی ہین کہ قیمت ا جو ر دفعہ مساوات ح (لا) = ٠ مین اتی ہی وہ ر−١ دفعہ مساوات حَ (لا) = ٠ مین اتی ہی اور علی ہذالقیاس اور قیمت ب جو ص دفعہ مکرر مساوات ح (لا) = ٠ مین اتی ہی ص−١ دفعہ مساوات حَ (لا) = ٠ مین مکرر اتی ہے اور علی ہذالقیاس

اسمین بڑی اسانی ہوگی کہ ہم یون خیال کرین کہ مساوات ح (لا) = ٠ کی قیمت ا کی برابر جو قیمتین ہون اوسمین ر−١ ایسی ہوتی ہین کہ اونمین سی ہر یک مین حَ (لا) = ٠ کی قیمت ا کی مکرر واقع ہوتی ہی اور یہی کیفیت اور مکررہ قیمتوں کی ہی پس اس خیال سی ہم کو یقین واثق ہو جائیگا کہ دفعہ ١٠٢ کا دعوی عام ہی خواہ مساوات ح (لا) = ٠ کی قیمتین برابر ہون یا نا برابر

(١٠٤) مساوات ح (لا) = ٠ کی ایک قیمت سی زیادہ قیمتین مساوات حَ (لا) = ٠ کی کوئی سی دو متصل کی قیمتوں کے درمیان نہین واقع ہوسکتین اسواسطی کہ اگر ایک قیمت سی زیادہ قیمتین واقع ہون تو ایک قیمت یا کئی قیمتین مساوات حَ (لا) کی اونکی درمیان واقع ہونگین تو مساوات حَ (لا) = ٠ کی قیمتین جو بموجب فرض کے متصلہ تہین متصلہ نہ رہین

اور ایسی ہی مساوات حَ (لا) = ۰ کی سب سی بڑی قیمت سی بڑی قیمت مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک ہی ہو سکتی ہی اور مساوات حَ (لا) = ۰ کی سب سے چہوٹی قیمت سی چہوٹی قیمتین بہت سی ہو سکتی ہین۔

(۱۰۵) اگر مساوات ح (لا) = ۰ کی سب قیمتین حقیقی ہون تو مساوات حَ (لا) = ۰ کی بہی سب قیمتین حقیقی ہونگین اسواسطی کہ دوسرے مساوات پہلی مساوات سی درجہ مین ایک کم ہے اور ہر یک قیمت دوسری مساوات کی پہلی مساوات کی دو متصل کی قیمتون کی درمیان واقع ہی اور علی العموم اگر مساوات ح (لا) = ۰ کی م حقیقی قیمتین ہون تو مساوات حَ (لا) کی یقینی م - ۱ حقیقی قیمتین ہونگین اور اسی زیادہ بہی قیمتین ہو سکتی ہین

(۱۰۶) چونکہ حً (لا) اول جملہ مشتقہ حَ (لا) کا ہی تو مساوات حً (لا) = ۰ کی قیمتین جنکا شمار طاق ہو وہ مساوات حَ (لا) = ۰ کی ہر دو متصل کی قیمتون کی درمیان واقع ہونگین پس اگر مساوات ح (لا) = ۰ کی م حقیقی قیمتین ہون تو مساوات حَ (لا) = ۰ کی کم از کم م - ۱ حقیقی قیمتین اور مساوات حً (لا) = ۰ کی کم از کم م - ۲ حقیقی قیمتین ہونگین اسی طریقہ کے مراعت سی یہہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ اگر مساوات ح (لا) = ۰ کی م حقیقی قیمتین ہو تو مساوات حَ (لا) = ۰ کی کم از کم م - ر حقیقی قیمتین ہونگین

اسی معلوم ہوا کہ اگر مساوات حَ (لا) = ۰ کی لو خیالی قیمتین ہون تو مساوات ح (لا) = ۰ کی کم از کم لو خیالی قیمتین ہونگی اسواسطی کہ اگر مساوات ح (لا) = ۰ کی لو خیالی قیمتون سی کم قیمتین ہون تو اوسکی ن - لو حقیقی قیمتون سی زیادہ قیمتین ہونگین ن درجہ مساوات کا ہی پس مساوات حَ (لا) = ۰ کی ن - لو - ر حقیقی قیمتون سی زیادہ قیمتین ہونگین اور چونکہ یہہ مساوات ن - ر درجہ کی ہے اسلئی اوسکی لو قیمتین خیالی نہین ہو سکتین اور یہہ خلاف فرض کے ہے

مثلاً فرض کرو کہ ح (لا) = لا^م (ا - لا)^ن

مساوات حَ (لا) = ۰ کی تمام اصلی قیمتین ہین یعنی ن برابر صفر کے ہی یا برابر اکی ہی اسی معلوم ہوا کہ مساوات ح^ن (لا) = ۰ کی تمام ن اصلی قیمتین درمیان ۰ اور اکی واقع ہونگین اور یہہ مساوات یہہ ہے کہ

$$= 1 - \frac{ن}{1} + \frac{ن(ن+1)}{1 \times 2} لا + \frac{ن(ن-1)(ن+1)(ن+2)}{1 \times 2} لا^{2} - \ldots$$

(۱۰۷) اگر مساوات ح (لا) = ۰ کی تمام حقیقی قیمتین معلوم ہون تو مساوات ح (لا) = ۰
کی نسبت یہہ تحقیق کر سکتی ہین کہ اوسکی اصلی قیمتین کتنی ہین فرض کرو کہ مساوات ح (لا) = ۰
کی قیمتین سہ و صہ و لر و . . . کہ بہ ترتیب تنازلی بلحاظ مقدار کی جبر مقابلہ مین مرتب کیجائین اور ح (لا) مین
لا کی جگہہ سہ و صہ دلر . . . کو متواتر رکہو اور جو نتایج حاصل ہون اونکی علامتون پر خیال کرو
اگر نتایج مختلف العلامت ہونگی تو مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت ان قیمتون مین سی دو متصل
کی قیمتون مین واقع ہونگین اور اگر متحد العلامت ہونگی تو کوئی قیمت دو متصل کی قیمتون کے درمیان
نہین واقع ہونگین دفعات ۹۸ اور ۱۰۴ کے دیکہو
مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت بڑی جبر مقابلہ مین بہ نسبت سہ کی ہوگی اگر ح (سہ) منفی ہو
اور کوئی قیمت بڑی نہ ہوگی تو ح (سہ) مثبت ہوگا اور اگر مساوات جفت درجہ کی ہو اور ح (کں) منفی ہو
تو جبر مقابلہ مین مساوات کی ایک قیمت کم بہ نسبت کر کی ہوگی یا اگر مساوات طاق درجہ کی ہو اور
ح (کں) مثبت ہو اور یہہ بات کسی اور طرح سی نہین ہوگی دفعات ۹۸ اور ۱۰۴ کی دیکہو
اسی معلوم ہوا کہ ح (لا) مین بجای لا کی متواتر + ∞ و سہ و صہ و لر . . . کر و − ∞ کو
رکہنی سی جو سلسلہ پیدا ہوگا اوسمین جتنی تعداد تغیرات علامات کی ہوگی اوتنی ہی مساوات ح (لا) = ۰
کی حقیقی قیمتون کا شمار ہوگا لیکن اگر ح (لا) مین ان قیمتون کی رکہنی سی ح (لا) معدوم ہو جائیگا
تو اوسی یہہ دریافت ہوگا کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی برابر قیمتین ہونگین اور تعداد اونکی بات شمسی دریافت ہو سکتی ہے
(۱۰۸) تمثیلاً اس بات کو تحقیقات کرتی ہین کہ مساوات $لا^{3}$ − ن لا + ر = ۰ کی تمام قیمتون کی ممکن
ہونی کی لئی کیا شرائط ہونی چاہئین
ق کو مثبت مقدار فرض کرو یہان ح َ(لا) = ۳ $لا^{2}$ − ق تو مساوات ح َ(لا) = ۰ کی
قیمتین $\pm \sqrt{\frac{ق}{3}}$ ہین اور فرض کرو کہ سہ = + $\sqrt{\frac{ق}{3}}$ اور صہ = − $\sqrt{\frac{ق}{3}}$
تو ح (سہ) = + $\left(\frac{ق}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ − ق $\left(\frac{ق}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ + ر = −۲ $\left(\frac{ق}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ + ر

$ح(صہ) = -\left(\frac{ق}{۳}\right)^{\frac{۳}{۲}} + ق\left(\frac{ق}{۳}\right)^{\frac{۱}{۲}} + ر = ۲\left(\frac{ق}{۳}\right)^{\frac{۳}{۲}} + ر$

اول فرض کرو کہ $\left(\frac{ر}{۲}\right)^۲$ بڑا $\left(\frac{ق}{۳}\right)^۳$ سی ہو پس اگر ر مثبت ہو تو ح (سہ) اور ح (صہ) دونو مثبت ہونگی اور مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک حقیقی قیمت ہوگی اور وہ جبر مقابلہ مین چھوٹی بہ نسبت صہ کی ہوگی اور اگر ر منفی ہو تو ح (سہ) اور ح (صہ) دونو منفی ہونگے اور مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک حقیقی قیمت ہوگی جو سہ سی بڑی ہوگی

اب فرض کرو کہ $\left(\frac{ر}{۲}\right)^۲$ چھوٹا $\left(\frac{ق}{۳}\right)^۳$ سی ہو تو ح (سہ) منفی ہی اور ح (صہ) مثبت ہی اور مساوات ح (لا) = ۰ مین تینوں حقیقی قیمتیں ہین یعنی ایک بڑی سہ سی اور ایک سہ اور صہ کے درمیان اور ایک چھوٹی صہ سی جبر مقابلہ مین

(۱۰۹) مساوات کی حقیقی قیمتوں کے مقام دریافت کرنی کی ترکیب وارنگ صاحب نی اول ایجاد کی اور لاگرانج نی اوسمین پھر دوبارہ جان ڈالی اوسکو قیمتوں کے علیحدہ کرنی کی ترکیب وارنگ صاحب کی کہتی ہین فرض کرو کہ ہم کو مساوات کی برابر قیمتیں معلوم ہوگئیں ہین اور ہم نی اوسکی موافق جو اجزائے ضربی تھی اونکو مساوات سی خارج کر دیا ہی اور ایسی مساوات حاصل کرلی ہی کہ اوسکی قیمتیں غیر مساوی ہین اور اب اسی مساوات پر بحث ہی اور اوسکو مساوات ح (لا) = ۰ سی تعبیر کرتی ہین فرض کرو کہ ک ایک مقدار ہو جو ہر دو قیمتوں کی تفاوت سی کم ہی اور ص اعلی حد نمائی مثبت قیمتوں کی ہی اب ح (لا) مین بجائے لا کی ص و ص - ک و ص - ۲ ک و ص - ۳ ک ۰ ۰ ۰ رکھو اور یہہ نوبت اوس مقدار تک پہونچاؤ جو الجبرا مین مساوات کی سب سے چھوٹی قیمت سی بھی چھوٹی قیمت ہو اور جو نتایج حاصل ہون اونکی سلسلہ کی علامتوں پر نظر ڈالو پس جب ایک تغیر علامت واقع ہوگا تو جو دو قیمتوں کی رکھنی سی یہہ تغیر پیدا ہوا ہی اونکی درمیان ایک قیمت مساوات کی ہوگی اور جب ایک تواتر علامت واقع ہوگا تو جن دو قیمتوں کی رکھنی سی یہہ تواتر پیدا ہوا ہی اونکی درمیان کوئی قیمت مساوات کی نہیں ہوگی

اب ہم کو اس بات پر توجہ کرنی چاہیی کہ ک کو کسطرح تحقیق کرتی ہین فرض کرو کہ ایک مساوات ایسی بنائی گئی ہی کہ جسکی قیمتیں مساوات مفروضہ کی ہر دو قیمتوں کے تفاوت کی مجذور کی برابر ہون اور اس مساوات

کی مثبت قیمتون کی ادنی حد غائی دریافت ہوئی ہی اوسکو ذرسی تغیر کرو تو ۱ فرقیمت مناسب کی ہوگی

دفعہ ۱۰۶ مین ہم نی ایک مثال لکہی ہی کہ کسطرح ایک مساوات بنتی ہی کہ جسکی قیمتین مساوات مفروضہ کے قیمتون کے تفاوت کی مجذور کی برابر ہوتی ہین اور اس مثال پر کیا موقوف ہی ہم علی العموم اسپر زیادہ بحث کرینگے وارنگ صاحب کی ترکیب ایسی پیچیدہ ہی کہ وہ تیسرے درجہ کی مساوات سی زیادہ درجہ کی مساوات مین عمل مین لانی سی کچہہ فائدہ نہین دیتی اونسی نتیجے پیچ در پیچ پیدا ہوتی ہین کہ اونکا کہولنا دشوار ہی غرض یہہ ترکیب عملیات مین تو کسی کام کی نہین مگر نظریات مین اوسسے مطلب حاصل ہو جاتا ہے

(۱۱۰) تمثیلاً وارنگ صاحب کے ترکیب کے لئی یہہ مساوات

لا۳ − ۳لا۲ − ۴لا + ۱۳ = ۰ لو

بموجب دفعہ ۱۰۶ کی وہ مساوات جسکی قیمتین مساوات مفروضہ کی قیمتون کی تفاوت کی مجذور ہون یہہ ہے

ذ۳ − ۴۲ذ۲ + ۴۴۱ذ − ۴۹ = ۰

ذ کی جگہہ ۱/ی رکہو تو ۴۹ی۳ − ۴۴۱ی۲ + ۴۲ی − ۱ = ۰

یعنی ۴۹ی۲ (ی − ۹) + ۴۲ (ی − ۱/۴۲) = ۰

اب ۹ اعلی حد غائی ی کی قیمتون کی ہی اسیواسطے ادنی حد غائی ۱/۹ ہوگی

اسی معلوم ہوا کہ √(۱/۹) یعنی ۱/۳ مساوات مفروضہ کی ہر دو قیمتون کے تفاوت سی کم ہے

اب بموجب دفعہ ۸۷ کی مساوات مفروضہ کی مثبت قیمتون کی اعلی حد غائی ۴ + ۱ یعنی ۵ ہی اور بموجب دفعات ۹۴ و ۹۶ کے مساوات مفروضہ کی منفی قیمتون کی اعلی حد غائی تعداداً

− (۱ + √۱۳) ہی پس مساوات مفروضہ کی تمام قیمتین ۵ اور −۳ کے درمیان واقع ہوتی ہین

اب لا کی قیمتین ۵ اور ۵ − ۱/۳ اور ۵ − ۲/۳

متواتر رکہنی سی یہہ دریافت ہوگا کہ ایک قیمت ۳ اور ۲ ۲/۳ کی درمیان اور ایک قیمت ۲ ۲/۳ اور ۲ ۱/۳ کی درمیان اور ایک قیمت −۲ اور −۲ ۱/۳ کے درمیان واقع ہوگی

(۱۱۱) اب ہم اس باب کو ایک دعوی پر ختم کرتی ہین اور یہہ دعوی اون اصول کی ایک مثال ہی جو ابہی ہمنی ثابت کئی ہین

مساوات ح (لا) = ۰ مین جسمین

$$ح (لا) = ع لا^ن + ع_۱ لا^{ن-۱} + \cdots + لا - ر$$

مین اگر ق کی عددی قیمت تعداداً سب سے بڑا اسم ہو اور ر مثبت اور $\frac{۱}{۲ + ۴ ق}$ سی کم ہو تو ایک حقیقی قیمت ۲ ر سی چھوٹی ہوگی

جب لا صفر ہو تو ح (لا) منفی ہی تو لا کی مثبت قیمت ح (لا) کو مثبت بنائیگی اور بدرجہ اولی مثبت بنائینگے اگر وہ

$$لا - ر - ق (لا^ن + لا^{ن-۱} + \cdots + لا^۳ + لا^۲)$$

کو مثبت بنائینگے یعنی اگر وہ لا - ر - ق لا^۲ $\frac{۱ - لا^{ن-۱}}{۱ - لا}$ کو مثبت بنائینگے

اسی معلوم ہوا کہ اگر لا بہ نسبت واحد کی کم ہو اور (۱ - لا) (لا - ر) - ق لا^۲ مثبت ہو تو ح (لا) بدرجہ اولی مثبت ہوگا اب لا کی جگہہ ۲ ر آخر جملہ مین رکھو تو وہ ر [۱ - ۲ ر - ۴ ق ر] ہو جایگا اور یہہ مثبت ہی کیونکہ بموجب فرض کی ر (۲ + ۴ ق) چھوٹا بہ نسبت واحد کی ہی پس ح (لا) مثبت ہی جب لا = ۲ ر ہو اور ح (لا) منفی ہی جب لا = ۰ اسیواسطے مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت ۰ اور ۲ ر کے درمیان واقع ہوتی ہے

اسیطرح اگر آخر رقم ر بجای - ر کے ہو اور ر مثبت ہو اور چھوٹا $\frac{۱}{۲ + ۴ ق}$ سی ہو تو مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت ۰ اور - ۲ ر کے درمیان واقع ہوگی

اٹھوان باب قیمتین محدود اور ناطق

(۱۱۲) قیمت ناطق اور محدود سی مراد اوس قیمت سی ہی جو ایک محدود صورت مین بیان ہو سکے خواہ وہ صحیح ہو یا کسر ہو اور اوسمین مقدار دیر اصم نہ ہون اب ہم یہہ بتلائینگے کہ مساوات کی امثال جب اعداد ناطق ہون خواہ صحیح یا کسر تو ناطق اور محدود قیمتین مساوات کی آسانی سی دریافت ہو سکتی ہین

دفعہ ۵۳ مین ہم نی بیان کیا ہی کہ اگر مساوات کی امثال ناطقہ ہون اور سب صحیح نہ ہون تو اوس مساوات کی ہئیت بدل کر ایک ایسی مساوات بنا سکتی ہین کہ جسکی سب امثال صحیح ہون

اور اشتمال اول رقم کا واحد ہو اسواسطے ہم اب اس آخر الذکر مساوات پر بحث کرینگے اور اول ہم بتلاوینگے کہ مساواتین اوس صورت کی قیمتیں مکسور ناطقہ نہین رکھینگی

(۱۱۳) اگر مساوات کی اشتمال تمام اعداد صحیح ہوں اور اوسکی اول رقم کا اشتمال واحد ہو تو مساوات کی کوئی قیمت مکسور ناطقہ نہین ہوسکتی

فرض کرو کہ مساوات

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ع}_1 \text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ع}_2 \text{لا}^{\text{ن}-2} \ldots\ldots + \text{ع}_{\text{ن}-2} \text{لا}^2 + \text{ع}_{\text{ن}-1} \text{لا} + \text{ع}_{\text{ن}} = 0$$

اور اگر یہہ ممکن ہو تو فرض کرو کہ قیمت مکسور ناطقہ مختصر الحدین $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ ہی اور اسکو لا کی جگہ مساوات میں رکھو اور سب کو $\text{ب}^{\text{ن}-1}$ مین ضرب دو تو

$$\frac{\text{ا}^{\text{ن}}}{\text{ب}} + \text{ع}_1 \text{ا}^{\text{ن}-1} + \text{ع}_2 \text{ا}^{\text{ن}-2} \text{ب} + \ldots + \text{ع}_{\text{ن}-2} \text{ا}^2 \text{ب}^{\text{ن}-3} + \text{ع}_{\text{ن}-1} \text{ا} \text{ب}^{\text{ن}-2} + \text{ع}_{\text{ن}} \text{ب}^{\text{ن}-1} = 0$$

اور اسیواسطے $-\frac{\text{ا}^{\text{ن}}}{\text{ب}} = \text{ع}_1 \text{ا}^{\text{ن}-1} + \text{ع}_2 \text{ا}^{\text{ن}-2} \text{ب} + \ldots + \text{ع}_{\text{ن}-2} \text{ا}^2 \text{ب}^{\text{ن}-3} + \text{ع}_{\text{ن}-1} \text{ا} \text{ب}^{\text{ن}-2} + \text{ع}_{\text{ن}} \text{ب}^{\text{ن}-1}$

اب آخر نتیجہ ناممکن ہی اسواسطے کہ بائین طرف کا رکن تو صحیح مقدار ہی اور دائین طرف کا رکن صحیح مقدار نہیں ہے اسواسطے مساوات مفروضہ کی قیمت کسر نہیں ہوسکتی

(۱۱۴) اسی معلوم ہوا کہ فقط ہم کو تحقیقات اون قیمتوں کی کرنی چاہی جو محدود اور ناطقہ اور صحیح ہو اور اب ہم ترکیب اونکی دریافت کرنی کی بیان کرتی ہین اس ترکیب کو بعض اوقات ترکیب مقسوم علیہ ہونے کی کہتی ہین اور بعض اوقات اوسکو نیوٹن صاحب کی ترکیب کہتی ہین

فرض کرو کہ مساوات

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ع}_1 \text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ع}_2 \text{لا}^{\text{ن}-2} \ldots + \text{ع}_{\text{ن}-2} \text{لا}^2 + \text{ع}_{\text{ن}-1} \text{لا} + \text{ع}_{\text{ن}} = 0$$ ہو

اور ا ایک صحیح قیمت ہی اس قیمت کی مندرج کرنی سی اور ارقام کو بہ ترتیب معکوس لکھنی سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ع}_{\text{ن}} + \text{ع}_{\text{ن}-1} \text{ا} + \text{ع}_{\text{ن}-2} \text{ا}^2 + \ldots\ldots + \text{ع}_2 \text{ا}^{\text{ن}-2} + \text{ع}_1 \text{ا}^{\text{ن}-1} + \text{ا}^{\text{ن}} = 0$$

اسواسطے ا پر تقسیم کرنے سے

$$\frac{ع_{ن}}{ا} + ع_{ن-1} + ع_{ن-2}\,ا + \cdots + ع_{2}\,ا^{ن-3} + ع_{1}\,ا^{ن-2} + ا^{ن-1} = ٠$$

اسی معلوم ہوا کہ $\frac{ع_{ن}}{ا}$ ایک صحیح عدد ہوا وسکو $ق_{1}$ سی تعبیر کرو اور اسکو ا پر تقسیم کرو تو

$$\frac{ق_{1} + ع_{ن-1}}{ا} + ع_{ن-2} + \cdots ع_{2}\,ا^{ن-4} + ع_{1}\,ا^{ن-3} + ا^{ن-2} = ٠$$

اسی معلوم ہوا کہ $\frac{ق_{1} + ع_{ن-1}}{ا}$ ایک صحیح عدد ہونا چاہئی اسکو $ق_{2}$ سی تعبیر کرو اور پھر ا پر تقسیم کرو تو $\frac{ق_{2} + ع_{ن-2}}{ا}$ ایک صحیح عدد ہونا چاہئی اسیطرح عمل کرنی سی ا پر ن دفعہ تقسیم کرنی سے اس نتیجہ پر نوبت پہونچیگی کہ $\frac{ق_{ن-1} + ع_{1}}{ا} + 1 = ٠$

اسی معلوم ہوتا ہی کہ مساوات ح (لا) = ٠ کی ایک قیمت ا کی ہونی کی واسطی یہہ شرائط ضرور ہیں کہ اخر رقم مساوات کی ا پر پوری تقسیم ہوتی ہو اور خارج قسمت پر جو اسطرح حاصل ہو اگر لا کا امثال زیادہ کیا جاے تو حاصل جمع بہی ا پر پورا تقسیم ہو اور اسطرح جو خارج قسمت حاصل ہو اور لا^۲ کا امثال جو مساوات میں ہی زیادہ کریں تو حاصل جمع ایسا حاصل ہو کہ وہ ا پر پورا تقسیم ہو اور اسیطرح عمل کئی جائیں جب تک کہ ن - ۱ تقسیموں پر نوبت پہونچی اور خارج قسمت جو حاصل ہو اوسپر لا^{ن-۱} کا امثال زیادہ کرو تو حاصل جمع پورا ا پر تقسیم ہو اور خارج قسمت - ۱ ہو

اگر ان تمام مراتب میں سی کسی مرتبہ پر شرط مطلوب ٹوٹ جاے تو جان لینا چاہئی کہ صحیح عدد ا قیمت مساوات کی نہیں ہی

(۱۱۵) ہم نی دفعہ گذشتہ میں اون شرائط کو دریافت کیا ہی کہ جنکی موافق صحیح عدد ا مساوات ح (لا) = ٠ کی ایک قیمت بنتا ہی اب یہہ بات اسانی سی دریافت ہوتی ہی کہ اگر ان شرائط میں سی اخر شرط پوری ہو تو صحیح عدد ا قیمت مساوات کی ہوگا اسواسطے کہ اخر شرط اسطرح تعبیر ہوتی ہی کہ

$$\frac{ع_{ن}}{ا^{ن}} + \frac{ع_{ن-1}}{ا^{ن-1}} + \frac{ع_{ن-2}}{ا^{ن-2}} + \cdots + \frac{ع_{2}}{ا^{2}} + \frac{ع_{1}}{ا} = -1$$

اب اگر یہہ صحیح ہو تو ا^ن میں ضرب دینی سی مساوات ح (لا) = ٠ کی قیمت ا کا ہونا ظاہر ہے

مساوات کی تمام محدود اور ناطق قیمتوں کی دریافت کرنی کی واسطی اخر رقم کے تمام پوری بانٹنی والی مقداریں دریافت کریں اور اس بات کو جانچیں کہ وہ شرائط دفعہ ۱۱۴ کو پورا کرتی

ہین اس امتحان کی محنت کم ہو جائیگی اگر ہم اول مثبت اور منفی قیمتون کی حد غائی دریافت کرلین
ان حدود غائی کی دریافت کرنی سی اون صحاح پر آزمایش کی ضرورت نہین رہیگی جو اون حدود غائی
سی باہر ہون فقط اونہین اعداد کی آزمایش کرنی پڑیگی جو ان حدود غائی کی درمیان واقع ہونگی

(۱۱۶) تمثیلاً اس مساوات کو لو کہ

$$لا^{۵} + ۵ لا^{۴} + لا^{۳} - ۱۶ لا^{۲} - ۲۰ لا - ۱۶ = ۰$$

یہان بموجب دفعہ ۸۹ کی $۱ + \sqrt[۳]{۲۰}$ اعلی حد غائی ہی اور لا کی جگہ ر لکھنی سی یہہ مساوات حاصل ہوگی

$$ر^{۴} (ر - ۵) + ر^{۳} + ۱۶ ر (ر - \frac{۵}{۴}) + ۱۶ = ۰$$

اسمین ۵ اعلی حد غائی مثبت قیمتون کی ہی اسی معلوم ہوا کہ تمام مثبت قیمتین مساوات کی
۴ اور −۵ کی درمیان واقع ہوتی ہین اور −۱۶ کی پوری باٹنی والی صحاح ان حدود غائی کی درمیان
جو واقع ہین اب ان اعداد کا امتحان کرتی ہین کہ کونسی اونمین سی قیمتین ہین

۴	۲	۱	−۱	−۲	−۴
−۴	−۸	−۱۶	+۱۶	+۸	+۴
−۲۴	−۲۸	−۳۶	−۴	−۱۲	−۱۶
−۶	−۱۴	−۳۶	+۴	+۶	+۴
−۲۲	−۳۰	−۵۲	−۱۲	−۱۰	−۱۲
	−۱۵	−۵۲	+۱۲	+۵	+۳
	−۱۴	−۵۱	+۱۳	+۶	+۴
	−۷	−۵۱	−۱۳	−۳	−۱
	−۲	−۴۶	−۸	+۲	+۴
	−۱	−۴۶	+۸	−۱	−۱

اول سطر مین وہ پوری باٹنی والی اخر رقم کی لکھی ہین جنکا امتحان منظور ہے
اور ہر یک باٹنی والی کی نیچی وہ نتایج لکھی ہین جو اوسکی امتحان سے پیدا ہوتی ہین مثلاً پورا باٹنی والا ۴ ہے
اخر رقم −۱۶ کو ۴ پر تقسیم کرتی ہین اور خارج قسمت −۴ کو اوسکی نیچی لکھتی ہین اب اسکو لا کی سر −۲۰ سے
زیادہ کرتی ہین اور حاصل جمع −۲۴ کو نیچی لکھتی ہین اب اسکو ۴ پر تقسیم کرنی سی −۶ خارج قسمت نکلتا ہے

اسکو بھی لکھتی ہین اور اسپر سر لا کا -۱۶ زیادہ کرتی ہین تو -۲۲ حاصل ہوتی اور یہہ ۴ پر تقسیم نہین ہوتا اسی معلوم ہوا کہ ۴ قیمت نہین ہے ، ۱۲ اور -۱۲ اور -۴ کی موافق تمام شرائط پوری ہوتی ہین اسلئی یہی اعداد قیمتین مساوات کی ہین اور ۱ اور -۱ اسپے پچھلی شرط کو پورا نہین کرتے یعنی اخر خارج قسمت -۱ نہین ہی اسواسطی یہہ اعداد قیمتین نہین ہین

پس مساوات مفروضہ کو ح (لا) = ۰ سی تعبیر کرین تو یہہ دریافت ہوگا کہ (لا -۲) (لا +۲) (لا +۴) ایک جز ضربی ح (لا) کا ہی اور ہی یہہ معلوم ہوگا کہ دوسرا جز ضربی لا۲ + لا + ۱ ہے

(۱۱۷) اگر +۱ اور -۱ کو پوری باٹنی والون مین نہین امتحان کرتے کیونکہ اونکا یہہ امتحان کرنا کہ وہ قیمتین ہین یا نہین اسطرح اسان ہی کہ اونکو لا کی جگہ مساوات معلوم مین لکھکر دیکھہ لین اگر کوئی قوت لا کی مساوات مفروضہ مین سی مفقود ہو تو اوسکی جگہ اوسی قوت کو لکھو اور صفر اوسکا سر بنالو دفعہ ۱۵ دیکھو

جیسا اس ترکیب سے خاص اعداد ا و ب و س ... محدود اور ناطق قیمتین مساوات ح (لا) = ۰ کی ہون تو یہہ تحقیق کرنا باقی رہا ہی کہ یہہ قیمتین مکرر اتی ہین ح (لا) کو حاصل ضرب (لا - ا) (لا - ب) (لا - س) ... پر تقسیم کرین اور اس خارج قسمت کو سر (لا) سی تعبیر کرتی ہین اور پہر مساوات سر (لا) = ۰ پر اس ترکیب کو عمل مین لائین اسی طریقہ کے مراعت سی مساوات ح (لا) = ۰ کی مکرر قیمتین دریافت ہوسکتی ہین اور یہہ معلوم ہوسکتا ہی کہ ہر ایک قیمت مکرر کتنی دفعہ اتی ہے

ح (لا) = ۰ کی مساوی قیمتون کی ازمایش باب چہارم سے ہوسکتی ہے

(۱۱۸) دفعہ ۱۱۴ مین جو مساوات لی گئی ہی اوسکی اول رقم کا سر واحد ہے اگر اس مساوات کی جگہ ایسی مساوات لین کہ جسمین کوئی سر صحیح ع اول رقم کا ہو تو شرائط مستحصلہ مین فقط اخر خارج قسمت مین یہہ فرق پڑیگا کہ -۱ کی جگہ -ع حاصل ہوگا مثلاً فرض کرو کہ

۲ لا۳ - ۱۲ لا۲ + ۱۳ لا - ۱۵ = ۰

یہان ع‌ثلث + ۱ اعلی حد خاص مثبت قیمتون کی بموجب دفعہ ۹ کی اور بموجب دفعہ ۲۴ کی کوئی منفی قیمت نہین ہے

اور امتحان کرنی سی معلوم ہوتا ہی کہ ۱ قیمت نہین ہی پس آخر رقم کی پوری بانٹنی والی ۵ اور ۳ ہین تو انکی ترتیب یہہ ہو گی کہ

۵	۳
۳-	۵-
۱۰	۸
۲	
۱۰-	
۲-	

پس ۵ قیمت ہی اسواسطے کہ اوسی تمام شرائط پوری ہوتی ہین آخر خارج قسمت -۲ ہے اور ۳ قیمت نہین کیونکہ ۸ پورا ۳ پر تقسیم نہین ہوتا

(۱۱۹) آخر رقم کی پوری بانٹنی والون کا شمار اصول مفصلہ ذیل کی موافق ہی ہو سکتا ہے فرض کرو کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمت ا ہو لا کی جگہ م + ر رکہو تو ا-م ایک قیمت ر کی ایسی ہو گی جو مساوات ح (م + ر) = ۰ کی شرائط کو پورا کریگی جو رقم ر سے کچھہ لگاؤ نہین رکھتی وہ ح (م) ہی اور تمام امثال ر کی صحیح ہین اگر ح (لا) کی سب امثال صحیح ہون اور م بہی صحیح ہو دفعہ ۱۲ کو دیکھو پس اگر ا صحیح ہو تو ا-م بہی صحیح ہوگا اور اسواسطی ح (م) کو بموجب دفعہ ۱۱۴ کی تقسیم کر لیگا پس کوئی صحیح مقدار ا جو آخر رقم ح (لا) کو پورا بانٹتی ہو اور ح (م) کو ا-م نہ پورا تقسیم کرتی ہو تو وہ مقدار خارج از امتحان ہو سکتی ہے

یہان م کوئی صحیح منفی اور مثبت ہو سکتا ہی - +۱ اور -۱ قیمتین اوسکی مقرر کرنی سی ح (م) کے حساب مین بڑی آسانی ہو جاتی ہے

دفعہ ۱۱۶ کی مساوات معلوم کو تمثیلاً لو یہان ۴ آخر رقم کو پورا بانٹتا ہے لیکن ۴ + ۱ پورا ح (-۱) کو جو ۹ ہی نہین تقسیم کرتا ہی اسلئی یہہ قیمت مساوات کی نہین

اب یہہ مثال $لا^۳ - ۲۰ لا^۲ + ۱۶۴ لا + ۴۰۰ = ۰$ کی کوئی اس مساوات کی جو ہے دفعہ ۱۳۸ کی نہین ہی اور اوسکو اس صورت $لا^۲ (لا - ۲۰) + ۱۶۴ (لا - ...$

۵ ...

نوان باب تنزل معادلات

اس باب مین ہم اس بات کی تحقیقات کرینگی کہ کسطرح سی ایک مساوات کا حل اوسی کم درجہ کی مساوات کے حل پر بعض صورتون مین موقوف ہو سکتا ہی جبکہ اونکی قیمتون کی ارتباط معلوم ہون جس عمل سے یہہ امر دریافت ہوتا ہی اوسکو تنزل معادلات کہتی ہین

(۱۲۲) جب دو مساواتون مین ایک قیمت یا کئی قیمتین مشترک ہون تو اوس قیمت یا قیمتون کو دریافت کرو

فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ اور مح (لا) = ۰ مساواتین ہین جنکی ایک قیمت مشترک ا ہے

پس ح (لا) اور مح (لا) مین لا - ا ایک جز ضربی مشترک ہوگا ہی معلوم ہوا کہ ح (لا) اور مح (لا) کی وفق مشترک اعظم مین لا - ا ایک جز ضربی ہوگا اور علی ہذا القیاس ہر ایک جز ضربی مشترک ج (لا) اور مح (لا) کا وفق مشترک اعظم کا ہی جز ضربی ہوگا اور کوئی اور جز ضربی اس وفق اعظم مین نہین واقع ہوگا

پس اہی معلوم ہوا کہ اگر ہم ح (لا) اور مح (لا) کا وفق اعظم دریافت کرین اور اوسکو برابر صفر کے لکھہ دین تو اس مساوات کی قیمتین مطابقت نامہ معادلات ج (لا) = ۰ اور مح (لا) = ۰ کے مشترک قیمتون سے رہینگے

اگر ح (لا) اور مح (لا) مین کوئی جز ضربی مکرر آتا ہی تو وفق اعظم مین بہی مکرر آیگا

(۱۲۳) تمثیلاً فرض کرو کہ یہہ دو مساواتین ہین

$$لا^4 + ۳ لا^3 - ۵ لا^2 - ۶ لا - ۸ = ۰$$

$$\text{اور} \quad لا^4 + لا^3 - ۹ لا^2 + ۱۰ لا - ۸ = ۰$$

اب ان مساواتون کی دائین طرف کی ارکان کا وفق اعظم $لا^2 + ۲ لا - ۸$ ہی اور اگر اسکو برابر صفر کے لکھین تو لا = -۴ اور لا = ۲ کی حاصل ہوگا

پس دونو مساواتون کی مشترک قیمتین ۲ اور -۴ ہین

(۱۲۴) فرض کرو کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی دو قیمتین ا اور ب ہین جنکا ربط باہمی ہم کو یہہ معلوم ہے کہ ع ا + ق ب = ر اب مطلوب یہہ ہی کہ ان قیمتون کو دریافت کرین

چونکہ مساوات ح (لا) = ۰ کی ا اور ب قیمتین ہین تو ح (ا) = ۰ اور ح (ب) = ۰

لیکن ب = $\frac{\text{ر} - \text{ع ا}}{\text{ق}}$ اسیواسطے ح $\left(\frac{\text{ر} - \text{ع لا}}{\text{ق}}\right)$ = ۰

پس معادلات ح (لا) = ۰ اور ح $\left(\frac{\text{ر} - \text{ع لا}}{\text{ق}}\right)$ = ۰ کی مشترک قیمت ا ہے
تووہ بموجب دفعہ گذشتہ کی دریافت ہوسکتی ہی پس اسطرح تو ا دریافت ہوگیا اور اس ارتباط
ع ا + ق ب = ر سی ب دریافت ہوجایگا اسی معلوم ہوتا ہی کہ حاصل ضرب اجزاء ضربی
لا − ا اور لا − ب پر ح (لا) پورا تقسیم ہوجایگا اور خارج قسمت کو برابر صفر کی لکھین تو ایک
مساوات ایسی حاصل ہوجایگی کہ اوسی باقی قیمتین مساوات ح (لا) = ۰ کی دریافت ہوجاینگین

(۱۲۵) تمثیلاً فرض کرو کہ یہہ مساوات ہو

لا^{4} − ۷ لا^{3} + ۱۱ لا^{2} − ۷ لا + ۱۰ = ۰ (۱)

اور یہہ ہم کو معلوم ہی کہ اوسکی دو قیمتین ا اور ب مین ارتباط باہمی یہہ ہی کہ ب = ۲ ا + ۱
مساوات (۱) مین لا کی جگہہ ۲ لا + ۱ رکھو تو

(۲ لا + ۱)^{4} − ۷ (۲ لا + ۱)^{3} + ۱۱ (۲ لا + ۱)^{2} − ۷ (۲ لا + ۱) + ۱۰ = ۰

یعنی ۱۶ لا^{4} − ۲۴ لا^{3} − ۱۶ لا^{2} − ۴ لا + ۸ = ۰

یا ۴ لا^{4} − ۶ لا^{3} − ۴ لا^{2} − لا + ۲ = ۰ (۲)

اب معادلات (۱) اور (۲) کی بائین طرف کی ارکان کا وفق اعظم لا − ۲ ہے پس ا = ۲
اور اسیواسطے ب = ۵ یعنی مساوات مفروضہ کے دو قیمتین ۲ اور ۵ ہین تو اسی یہہ دریافت ہوگا کہ

لا^{4} − ۷ لا^{3} + ۱۱ لا^{2} − ۷ لا + ۱۰ = (لا − ۲) (لا − ۵) (لا^{2} + ۱)

پس اور قیمتین ± $\sqrt{(-۱)}$ ہین

(۱۲۶) یہہ ہوسکتا ہی کہ ایک اور زوج قیمتوں کا سہ اور صہ مین یہہ ارتباط ہو کہ ع سہ + ق صہ = ر
تو اس صورت مین ح (لا) اور ح $\left(\frac{\text{ر} - \text{ع لا}}{\text{ق}}\right)$ کی وفق اعظم مین لا کی دوسرے درجہ کا جملہ ہوگا جسمین
اجزای ضربی لا − ا اور لا − سہ ملتف ہونگی اگر قیمتین ا اور ب دونو مساوات ح (لا) = ۰

مین مکرر آئینگی تو ح (لا) اور ح (…) دونو عظم مین جزضربی لا − ا مکرر اویگا

(۱۲۷) علی العموم یہہ فرض کرو کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی دو قیمتین ا اور ب مین باہمی ارتباط یہہ ہی کہ ب = سر (ا) تو معادلات ح (لا) = ۰ اور ح [سر (لا)] = ۰ کی ایک قیمت مشترک ا ہوگی اور اس مشترک قیمت کو بموجب دفعہ ۱۲۲ کے دریافت کر سکتی ہین

(۱۲۸) ایک صورت ایسی بہی ہی کہ اوسمین دفعات ۱۲۴ اور ۱۲۶ کی کچہ امداد مساوات مفروضہ کی حل کرنی مین نہین کرتین مثلاً مساوات ح (لا) = ۰ ہو اور یہہ ہم کو معلوم ہی کہ اوسکی قیمتون کی زوج واقع ہوتے ہین اور ہر ایک زوج ا اور ب قیمتون کا اس ارتباط ا + ب = ۲ ر کی شرایط کو پورا کرتا ہے تو بموجب دفعہ ۱۲۴ کے ہم معادلات ح (لا) = ۰ اور ح (۲ ر − لا) = ۰ کی مشترک قیمتین دریافت کرینگے مگر ان قیمتون مین بالکل تطابق ہوگا اسواسطے کہ بموجب فرض کے ح (ا) = ۰ یعنی ح (۲ ر − ب) = ۰ اور ح (ب) = ۰ یعنی ح (۲ ر − ا) = ۰ پس قیمتین ا اور ب دونو مشترک دونو مساواتون مین ہین اور علی ہذا القیاس اور ازواج قیمتون کے مشترک دونو مساواتون مین ہین اسواسطے دونو مساواتون مین تطبیق تامہ ہوگی

(۱۲۹) جس مساوات پر دفعہ بالا مین بحث ہوئی ہی اوسکی تنزل کی بہت طریقی ہین مگر ہم اونمین صرف دو لکہتی ہین تاکہ طالب علمون کو اس بات کی مضمون مین مشق ہوجاے

اول ہم عمل اسطرح کرتی ہین کہ فرض کرو ا − ب = ۲ ی تو ہم کو ایک ساتہہ ہی یہہ مساواتین حاصل ہونگین

$$ح\ (ا) = ۰ \quad ا + ب = ۲ ر \quad ا − ب = ۲ ی$$

ان مساواتون مین سی دوسری تیسری مساوات سی ا = ی + ر اس قیمت کو مساوات اول مین رکہو تو ح (ی + ر) = ۰ اس مساوات سی قیمتین ی کی دریافت ہوسکتی ہین اور پہر ان قیمتون کی مطابق ا اور ب کی قیمتین بہی دریافت ہوجائینگی اب یہہ بات آسان ہی کہ مساوات ح (ر + ی) = ۰ مین ہم یہہ ثابت کردین کہ اوسمین ی کی جفت قوا ہین پس اگر ہم ی^{۲} کو مقدار مجہول خیال کرین تو اس مساوات کا درجہ مساوات مفروضہ کی درجہ سی نصف ہوگا

فرض کرو کہ مساوات مفروضہ کا ایک زوج قیمتون کا ا اور ب ہی اور دوسرا زوج سہ اور صہ ہی تو

ح (لا) = (لا − ا) (لا − ب) (لا − سہ) (لا − صہ) . . .

ح (ی + ر) = (ی + ر − ا) (ی + ر − ب) (ی + ر − سہ) (ی + ر − صہ) . . .

= (ی + (ا + ب)/۲ − ا) (ی + (ا + ب)/۲ − ب) (ی + (سہ + صہ)/۲ − سہ) (ی + (سہ + صہ)/۲ − صہ) . . .

= [ی² − ((ا − ب)/۲)²] [ی² − ((سہ − صہ)/۲)²] . . . .

یعنی ح (ی + ر) مین صرف ی کی جفت قوا ہین

درحقیقت اس مسئلہ مین کچھہ تمیز قیمتون ا اور ب کی درمیان نہین کی گئی اسلئی جو مساوات ایسی بنائی جائیگی اوسکی قیمت (ا − ب)/۲ ہو تو ضرور ہم کو یہہ توقع ہوسکتی ہی کہ (ب − ا)/۲ بہی اوسکی قیمت ہوگی اور نفس الامر مین یہی ہے جیسا کہ ظاہر

دوم اسطرح بہی عمل کرتی ہین کہ ی = اب کے فرض کرین تو

(لا − ا) (لا − ب) = لا² − (ا + ب) لا + اب = لا² − ۲ ر لا + ی

اگر ی کی مناسب قیمت فرض کرین تو لا² − ۲ ر لا + ی ایک جز ضربی ح (لا) کا ہوگا ح (لا) کا لا² − ۲ ر لا + ی پر تقسیم کیجاؤ جب تک کہ باقی کی صورت ع لا + ق پیدا ہو اسمین ع اور ق جملی ی کی ہین اور اون مین لا شامل نہین ہی اسی معلوم ہوا کہ ضروری شرط اس امر کی کہ ح (لا) کا جز ضربی لا² − ۲ ر لا + ی ہی سہ ہی کہ ع = ۰ اور ق = ۰

بموجب دفعہ ۱۲۲ کی ی کی قیمت ایسی دریافت کرو کہ وہ دونو مساواتون کی شرائط کو پورا کرے اور پہر ا اور ب کو ان مساواتون

ا + ب = ۲ ر ی = اب

سے دریافت کرو

(۱۳۰) فرض کرو کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی تین قیمتین ا اور ب اور س کا یہہ ارتباط باہمی معلوم ہی کہ ع ا + ق ب + ر س = ص اب مطلوب یہہ ہی کہ ان قیمتون کو دریافت کرین چونکہ ا اور ب اور س مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتین ہین تو ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ح (ا) = ۰ ح (ب) = ۰ ح (س) = ۰ پس

ح (ا) = ۰ ح (ب) = ۰ ح $\left(\frac{\text{ص} - \text{ع ا} - \text{ق ب}}{\text{ر}}\right)$ = ۰

اب اخر دو مساواتون سی ب کو دور کرو تو ایک یہہ مساوات ہم کو حاصل ہوگی کہ سر (ا) = ۰

پس مساوات ح (لا) = ۰ اور سر (لا) = ۰ کی ایک مشترک قیمت ا ہے اور یہہ بموجب

دفعہ ۱۲۲ کے دریافت ہو سکتا ہے

(۱۳۱) اس باب کی مضمون سی متعلق چند مثالین ایسا ہم لکھتی ہین

(۱) اس مساوات

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ع}_1 \text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ع}_2 \text{لا}^{\text{ن}-2} + \cdots + \text{ع}_{\text{ن}} = ۰$$

کی قیمتین سلسلہ حسابیہ مین ہین اونکو دریافت کرو

ان قیمتون کو ا و ا + ب و ا + ۲ ب ۰ ۰ ۰ سے تعبیر کرو

تو بموجب دفعہ ۷۸ کے

$$-\text{ع}_1 = \text{ا} + (\text{ا} + \text{ب}) + (\text{ا} + ۲\text{ب}) + \cdots + (\text{ا} + \overline{\text{ن} - ۱}\,\text{ب})$$

$$\text{ع}_1^2 - ۲\text{ع}_2 = \text{ا}^2 + (\text{ا} + \text{ب})^2 + (\text{ا} + ۲\text{ب})^2 + \cdots (\text{ا} + \overline{\text{ن} - ۱}\,\text{ب})^2$$

یعنی $-\text{ع}_1 = \text{ن ا} + \frac{\text{ن} (\text{ن} - ۱)}{۲} \text{ب}$

$$\text{ع}_1^2 - ۲\text{ع}_2 = \text{ن ا}^2 + \text{ن} (\text{ن} - ۱)\, \text{ا ب} + \frac{\text{ن} (\text{ن} - ۱)(۲\text{ن} - ۱)}{۶} \text{ب}^2$$

بیسوان باب الجبرا کا دیکھو

اول ماحصل کے مجذور مین سی دوسرے ماحصل کے ن گنی کو تفریق کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$(\text{ن} - ۱)\, \text{ع}_1^2 - ۲\,\text{ن ع}_2 = \frac{\text{ن}^2 (\text{ن}^2 - ۱)\, \text{ع}}{۱۲}$$

پس ب اسی دریافت ہوگیا اور ب کی معلوم ہونی سی ا معلوم ہو جائیگا

(۲) مساوات $\text{لا}^4 + ۳\text{لا}^3 - ۱۲\text{لا}^2 - ۴۸\text{لا} - ۶۴ = ۰$ کی دو قیمتین ہین جو مقدار مین مساوی ہین

اور اونکی علامتین مختلف ہین اونکو دریافت کرو یہان اگر لا کی علامت بدل دین تو مساوات

ایسی حاصل ہوگی جسکی اور مساوات مفروضہ کی ایک قیمت مشترک دونوں میں ہوگی یعنی مساوات مفروضہ اور اس مساوات

لا^{۴} - ۳ لا^{۳} - ۱۲ لا^{۲} + ۴۸ لا - ۶۴ = ۰

کی ایک قیمت مشترک ہی پس بموجب دفعہ ۱۲۲ کی ان دونوں مساواتوں کے بائیں طرف کی ارکان کا وفق اعظم دریافت کریں یا دونوں مساواتوں کو تفریق کرلیں تو

۶ لا^{۳} - ۹۶ لا = ۰

اسواسطی لا = ۰ یا لا^{۲} = ۱۶

پہلی سی کوئی قیمت نہیں حاصل ہوتی اور دوسری سی لا = ± ۴ حاصل ہوتا ہی اور + ۴ اور - ۴ مساوات مفروضہ کی قیمتیں ہیں

(۳) مساوات ۳ لا^{۴} - ۱۹ لا^{۳} + ۹ لا^{۲} - ۱۹ لا + ۶ = ۰ کی دو قیمتیں ہیں جنکا حاصل ضرب ۲ ہی اونکو دریافت کرو

فرض کرو کہ ی ایک قیمت ہی تو $\frac{۲}{ی}$ دوسری قیمت ہوگی اسی معلوم ہوا کہ

۳ ی^{۴} - ۱۹ ی^{۳} + ۹ ی^{۲} - ۱۹ ی + ۶ = ۰ (۱)

اور ۳ ($\frac{۲}{ی}$)^{۴} - ۱۹ ($\frac{۲}{ی}$)^{۳} + ۹ ($\frac{۲}{ی}$)^{۲} - ۱۹ ($\frac{۲}{ی}$) + ۶ = ۰

یعنی ۶ ی^{۴} - ۳۸ ی^{۳} + ۳۶ ی^{۲} - ۱۵۲ ی + ۴۸ = ۰

یا ۳ ی^{۴} - ۱۹ ی^{۳} + ۱۸ ی^{۲} - ۷۶ ی + ۲۴ = ۰ (۲)

معادلات (۱) اور (۲) کے بائیں طرف کی ارکان کا وفق مشترک ۳ ی^{۲} - ۱۹ ی + ۶ ہے اسکو برابر صفر کے لکھکر ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ ی = $\frac{۱}{۳}$ یا ی = ۶ پس $\frac{۱}{۳}$ اور ۶ مطلوبہ قیمتیں ہیں

دسواں باب معادلات متکافیہ

(۱۳۲) مساوات متکافیہ اوسی کہتی ہیں کہ اگر مقدار مجہول بدل کر متکافی اپنا ہوجاے تو بہی وہ مساوات نہ بدلی اسی معلوم ہوا کہ اگر ا قیمت ایسی مساوات کی ہو تو ا کا متکافی یعنی $\frac{۱}{ا}$ بہی اوس مساوات کی قیمت ہو اب ہم لکھینگے کہ مساوات متکافیہ کا حل موقوف

اون مساوات کی حل پر ہی کہ جسکا درجہ مساوات مفروضہ کی نصف درجہ سی بڑا نہین ہی
اول ہم یہہ کہتی ہین کہ مساوات کی امثال مین کیا ارتباط ہو کہ وہ مساوات متکافیہ ہو اور
بعد ازان یہہ لکھینگے کہ مساوات کا تنزل ہو کر کسطرح حل اوسکا آسان ہو سکتا ہے

(۱۳۳) وہ شرائط دریافت کرو کہ جنسی مساوات مفروضہ ایک مساوات متکافیہ ہو
فرض کرو کہ مساوات

$$لا^{ن} + ع_{۱} لا^{ن-۱} + ع_{۲} لا^{ن-۲} + \cdots + ع_{ن-۲} لا^{۲} + ع_{ن-۱} لا + ع_{ن} = ۰ \quad (۱)$$

لا کو $\frac{۱}{لا}$ سی بدلو اور پہر $لا^{ن}$ مین ضرب دو اور $ع_{ن}$ پر تقسیم کرو اور ارقام کو دوبارہ مرتب کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$لا^{ن} + \frac{ع_{ن-۱}}{ع_{ن}} لا^{ن-۱} + \frac{ع_{ن-۲}}{ع_{ن}} لا^{ن-۲} + \cdots + \frac{ع_{۲}}{ع_{ن}} لا^{۲} + \frac{ع_{۱}}{ع_{ن}} لا + \frac{۱}{ع_{ن}} = ۰ \quad (۲)$$

اب (۲) اور (۱) کی تطبیق کی لئی ضروری ہی کہ امثال یکسان قوا لا کی اپسمین برابر ہون تو

$$ع_{۱} = \frac{ع_{ن-۱}}{ع_{ن}} \text{ اور } ع_{۲} = \frac{ع_{ن-۲}}{ع_{ن}} \cdots ع_{ن-۲} = \frac{ع_{۲}}{ع_{ن}} \text{ و } ع_{ن-۱} = \frac{ع_{۱}}{ع_{ن}} \text{ و } ع_{ن} = \frac{۱}{ع_{ن}}$$

آخر مساوات سی یہہ حاصل ہوتا ہی کہ $ع_{ن}^{۲} = ۱$ اسیواسطی $ع_{ن} = +۱$ یا -۱ اسسے
معادلات متکافیہ کی دو نوع بنتی ہین
اول فرض کرو کہ $ع_{ن} = ۱$ تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ع_{۱} = ع_{ن-۱} \text{ اور } ع_{۲} = ع_{ن-۲} \cdots ع_{ن-۲} = ع_{۲} \text{ و } ع_{ن-۱} = ع_{۱}$$

پس معلوم ہوا کہ جو مساوات ایسی ہی کہ اول اور آخر سی ارقام متساوی الابعاد کے امثال برابر ہین
وہ مساوات متکافیہ ہی
دوم فرض کرو کہ $ع_{ن} = -۱$ تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ع_{۱} = -ع_{ن-۱} \text{ و } ع_{۲} = -ع_{ن-۲} \cdots ع_{ن-۲} = -ع_{۲} \text{ و } ع_{ن-۱} = -ع_{۱}$$

اس صورت مین اگر مساوات جفت درجہ کی ہی تو اوپر کے سلسلہ شرائط مین $ع_{م} = -ع_{م}$ اگر
$م = \frac{۱}{۲} ن$ کی ہو اور یہہ نا ممکن ہی بشرطیکہ $ع_{م} = ۰$ کے نہ ہو
پس مساوات متکافیہ وہ مساوات ہی جسمین آغاز اور انجام سی ارقام متساوی الابعاد

مقدار مین برابر اور علامت مین مختلف ہون مگر اوسکی ساتھہ یہہ بھی شرط ہی کہ اگر مساوات جفت درجہ کی ہو تو رقم متوسط کا سر صفر ہو

(۱۳۴) اول نوع کی مساوات متکافیہ طاق درجہ کی ایک قیمت کا -۱ ہونا بادی النظر مین ظاہر معلوم ہوتا ہی پس اگر ح (لا) = ۰ مساوات کو تعبیر کری تو ح (لا) پورا لا + ۱ پر تقسیم ہوگا دفعہ ۴ کو دیکھو فرض کرو کہ سر (لا) خارج قسمت ہو تو سر (لا) = ۰ مساوات متکافیہ جفت درجہ کی ہوگی اور اوسکی اخر رقم مثبت ہوگی

دوسری نوع کی مساوات متکافیہ طاق درجہ کی ایک قیمت کا + ۱ ہونا بادی النظر مین ظاہر معلوم ہوتا ہی پس اگر ح (لا) = ۰ مساوات کو تعبیر کری تو مساوات ح (لا) پورا لا - ۱ پر تقسیم ہوگا دفعہ ۴ دیکھو اور فرض کرو کہ سر (لا) خارج قسمت نکلتا ہی تو سر (لا) = ۰ مساوات متکافیہ جفت درجہ کی ہوگی اور اوسکی اخر رقم مثبت ہوگی

دوسری نوع کی مساوات متکافیہ جفت درجہ کی ایک قیمت + ۱ اور دوسرے قیمت -۱ ہوگی یہہ امر ظاہر بادی النظر مین معلوم ہوتا ہی پس اگر ح (لا) = ۰ مساوات کو تعبیر کری تو ح (لا) پورا لا۲ - ۱ پر تقسیم ہوگا دفعہ ۳۳ کو دیکھو اور فرض کرو کہ سر (لا) خارج قسمت نکلتا ہی تو سر (لا) = ۰ مساوات متکافیہ جفت درجہ کی ہوگی اور اوسکی اخر رقم مثبت ہوگی

(۱۳۵) خاص قیمتون کی باب مین جو کچھہ اوپر بیان ہوا وہ بدیہی ہی مگر اوسکا اثبات بہی بیان کیے اخر صورت مین دوسری نوع کی جو مساوات متکافیہ جفت درجہ کی بیان ہوئی اوسپر خیال کرو فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ مساوات کو تعبیر کرتا ہی اب ہم کو یہہ معلوم ہی کہ ح (لا) ایسا ہے کہ ح (لا) = - لا^ن ح (1/لا) اور یہہ بھی ہم کو معلوم ہے کہ ح (لا) پورا لا۲ - ۱ پر تقسیم ہوتا ہی اب ہم کو ثابت کرنا یہہ ہی کہ خارج قسمت ایسا جملہ ہی کہ اول اور اخر سی ارقام متساوی الابعاد کے امثال برابر مین

ہم کو معلوم ہے کہ ح (لا) = - لا^ن ح (1/لا)

اسیواسطے $\frac{ح(لا)}{لا^{م}-1} = - \frac{لا^{م}}{لا^{م}-1} ح\left(\frac{1}{لا}\right) = لا^{م-2} \frac{ح\left(\frac{1}{لا}\right)}{\frac{1}{لا^{م}}-1}$

اسی ہمارے بیان کی تصدیق ہوئی ہی کیونکہ $\frac{ح\left(\frac{1}{لا}\right)}{\frac{1}{لا^{م}}-1}$ اسطرح حاصل ہوتا ہی کہ $\frac{ح(لا)}{لا^{م}-1}$ مین لاکو $\frac{1}{لا}$ سے بدل دین

(۱۳۶) دفعہ ۱۳۴ اسی یہہ ثابت ہوتا ہی کہ مساوات متکافیہ کیا تو جفت درجہ کی ہوگی اور اخر رقم مثبت ہوگی یا اوسکا تنزل اسی صورت مین ہوسکتا ہی پس اسی صورت کی مساوات کو مدار اپنی ساری تحقیقات کا قرار دیتی ہین اور اب ثابت کرینگی کہ ایسی مساوات کا تنزل اوسکی نصف درجہ تک ہوسکتا ہے

(۱۳۷) مساوات متکافیہ جفت درجہ کی ہی اور اوسکی اخر رقم مثبت ہی مطلوب یہہ ہی کہ اوسکا تنزل کرین

فرض کرو کہ مساوات $لا^{2م} + ع_1 لا^{2م-1} + ع_2 لا^{2م-2} + \cdots + ع_2 لا^2 + ع_1 لا + 1 = 0$

$لا^{م}$ پر تقسیم کرو اور اغاز اور انجام سے جو اقام متساوی الابعاد ہون اونکو اکھٹا کر کے زوج بناؤ تو

$$لا^{م} + \frac{1}{لا^{م}} + ع_1\left(لا^{م-1} + \frac{1}{لا^{م-1}}\right) + ع_2\left(لا^{م-2} + \frac{1}{لا^{م-2}}\right) + \cdots = 0$$

اب فرض کرو کہ $لا + \frac{1}{لا} = ى$ تو

$$لا^2 + \frac{1}{لا^2} = ى^2 - 2$$

$$لا^3 + \frac{1}{لا^3} = \left(لا^2 + \frac{1}{لا^2}\right)\left(لا + \frac{1}{لا}\right) - ى = ى^3 - 3ى$$

اور علی العموم $لا^{ع+1} + \frac{1}{لا^{ع+1}} = \left(لا^{ع} + \frac{1}{لا^{ع}}\right)\left(لا + \frac{1}{لا}\right) - \left(لا^{ع-1} + \frac{1}{لا^{ع-1}}\right)$

پس ہم $لا^{ع+1} + \frac{1}{لا^{ع+1}}$ کو جملہ ناطقہ ى کا ع + ۱ درجہ کا کہہ سکتی ہین اسی معلوم ہوا کہ اوپر کی مساوات مین انکی مندرج کرنی سی ایک مساوات ى کی م درجہ کی حاصل ہوگی اور پہر ى کی ہر یک قیمت کی مطابق لا کی دو قیمتین اور ایک جزو ضربی $لا^2 - ى لا + 1$ حاصل ہوگا

(۱۳۸) دفعہ گذشتہ کا ارتباط علی العموم اسطرح بیان ہوسکتا ہے کہ

$$لا^{ع+1} + \frac{1}{لا^{ع+1}} = \left(لا^{ع} + \frac{1}{لا^{ع}}\right) ى - \left(لا^{ع-1} + \frac{1}{لا^{ع-1}}\right)$$

اسی ثابت ہوتا ہے کہ مقادیر

$$\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}} \quad \text{اور} \quad \text{لا}^{2} + \frac{1}{\text{لا}^{2}} \quad \text{اور} \quad \text{لا}^{3} + \frac{1}{\text{لا}^{3}} \quad \cdots$$

سلسلہ مکررہ بنانی مین اور قسطاس ارتباط ۱ − د + ۱ ہی انچاسواں باب جبر مقابلہ کا دیکھو

اب ہم اگی ایک جملہ عامہ $\text{لا}^{\text{ع}} + \frac{1}{\text{لا}^{\text{ع}}}$ کے واسطے ارقام د مین لکھینگے

(۱۳۹) تمثیلاً مساوات متکافیہ

$$2\,\text{لا}^{6} + \text{لا}^{5} - 13\,\text{لا}^{4} + 13\,\text{لا}^{2} - \text{لا} - 2 = 0 \quad \text{ہو تو}$$

بادی النظر مین یہاں ۱ اور −۱ قیمتین معلوم ہوتی ہین اسواسطے دائین طرف کی رکن کو لا^۲ − ۱ پر تقسیم کر سکتے ہین

اور اوسی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$2\,\text{لا}^{4} + \text{لا}^{3} - 11\,\text{لا}^{2} + \text{لا} + 2 = 0$$

اسواسطے $\quad \text{لا}^{2} + \frac{1}{\text{لا}^{2}} + \frac{1}{2}\left(\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}}\right) - \frac{11}{2} = 0$

$\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}} = \text{د}$ رکھو تو

$$\text{د}^{2} - 2 + \frac{\text{د}}{2} - \frac{11}{2} = 0$$

$$\text{یا} \quad \text{د}^{2} + \frac{\text{د}}{2} - \frac{15}{2} = 0$$

$$\text{د} = \frac{5}{2} \quad \text{یا} \quad -3$$

اسی معلوم ہوا کہ $\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}} = \frac{5}{2}$ یا $\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}} = -3$

اسواسطے $\quad \text{لا} = 2 \;\text{یا}\; \frac{1}{2} \;\text{یا}\; \frac{1}{2}\left(-3 \pm \sqrt{5}\right)$

(۱۴۰) مساوات

$$\text{لا}^{2\text{م}} + \text{ع}\,\text{لا}^{2\text{م}-1} + \text{ع}_{2}\,\text{لا}^{2\text{م}-2} + \cdots + \text{ع}_{\text{م}}\,\text{لا}^{\text{م}} + \text{ع}_{\text{م}-1}\,\text{س}\,\text{لا}^{\text{م}-1} + \text{ع}_{\text{م}-2}\,\text{س}^{2}\,\text{لا}^{\text{م}-2}$$

$$+ \cdots + \text{ع}_{2}\,\text{س}^{\text{م}-2}\,\text{لا}^{2} + \text{ع}_{1}\,\text{س}^{\text{م}-1}\,\text{لا} + \text{س}^{\text{م}} = 0$$

بدل کر مساوات متکافیہ بن سکتی ہی اسطرح کہ $\text{لا} = \text{ی}\sqrt{\text{س}}$ کے فرض کرین اور

س^م پر تقسیم کرین تو مساوات متکافیہ ی مین حاصل ہوجائیگی جسکی صورت اصلی کینڈی پر ہوگی

گیارہوان باب معادلات ثنائی یا دور رقمی

(۱۴۱) جس مساوات کی صورت لا^ن - ا = ۰ ہو اور اوسمین ا مقدار معلوم ہو تو اوسکو معادلہ یا مساوات ثنائی کہتے ہین۔ اس مساوات کی قیمتین سب مختلف ہوتی ہین کیونکہ لا^ن - ا کا اول جملہ مشتق ن لا^{ن-۱} ہے اور کوئی قیمت ایسی لا کی نہین ہو سکتی کہ لا^ن - ا اور ن لا^{ن-۱} کو معدوم کرے دفعہ ۷۵ دیکھو

(۱۴۲) اگر لا^ن - ا = ۰ تو لا = ا^{۱/ن} یعنی لا برابر ا کی ن مرتبہ کی نزول کے ہی لیکن مساوات لا^ن - ا = ۰ کی ن قیمتین بموجب دفعہ ۳۳ کی ہین اور بموجب دفعہ ۱۴۱ کے سب مختلف ہین اسی یہہ ایک بڑا نتیجہ نکلتا ہی کہ ہر یک مقدار جبریہ کی ن مرتبی کی نزول ن طرح کی ہوتی ہین مقدار جبریہ سی مراد ہی ہماری حقیقی مقدار سی یا مقدار تخیلی سی جو ع + ق √-۱ کی صورت رکھتی ہو

(۱۴۳) فرض کرو کہ ا مقدار کی ن مرتبی کی نزولون مین سی ایک کو ط تعبیر کرتا ہی تو ط^ن = ا پس مساوات لا^ن - ا = ۰ مین لا = ط ی کے فرض کرو تو ط^ن ی^ن - ا = ۰ اسیواسطے ی^ن - ۱ = ۰ اسی معلوم ہوا کہ ی = ۱^{۱/ن} یعنی ی برابر ایک کے ن مرتبہ کے نزول کی برابر ہے اور لا = ط ی = ط ۱^{۱/ن} لیکن لا = ا^{۱/ن} اسیواسطی ا^{۱/ن} = ط ۱^{۱/ن} پس

پس کسی مقدار جبریہ کی ن مرتبی کی نزول اسطرح دریافت ہو سکتی ہین کہ اونمین سی ایک کو واحد کے ن نزولون مین متواتر ضرب دین

(۱۴۴) اب فرض کرو کہ ا ایک حقیقی مثبت مقدار ہی اور ہم کو مساوات لا^ن - ا = ۰ اور مساوات لا^ن + ا = ۰ کے حل کرنی ہین اور فرض کرو کہ ط حسابی قیمت ا کے ن وین نزول کے ہی جو ہمیشہ ضابطہ ثنائی کی استعانت سی نکل سکتی ہی خواہ حقیقتاً یا تقریباً جبر مقابلہ کا چوبیسوان باب دیکھو اب لا = ط ی کی فرض کرو تو مساواتین مفروضہ کی یہہ صورت ہو جائیگی کہ ی^ن - ۱ = ۰ اور ی^ن + ۱ = ۰ اور یہہ مساواتین علم مثلث جملون کے استعانت سے حل ہو سکتی ہین تیئیسوان باب علم مثلث کا دیکھو اب ہم ان مساواتون کی تعبیر علم مثلث جملون کے استعانت کی حل کرینگے اور اگرچہ ہم اونکو جبر مقابلہ سی علی العموم نہین حل کر سکتی ہین مگر پہر بھی اونکی باب مین نتائج مستنبط ہو سکتے ہین

(۱۴۵) اگر مساوات لا^{ن} - ۱ = ۰ کی قیمت سہ ہو تو سہ^{م} بھی اوسکی قیمت ہوگی جسمین م صحیح مثبت یا منفی ہے

اسواسطی کہ (سہ^{م})^{ن} = سہ^{من} = (سہ^{ن})^{م} = ۱^{م} = ۱

(۱۴۶) اگر مساوات لا^{ن} + ۱ = ۰ کی سہ ایک قیمت ہو تو سہ^{م} بھی ایک قیمت ہوگی جسمین م طاق صحیح مثبت یا منفی ہے

اسواسطی کہ (سہ^{م})^{ن} = سہ^{من} = (سہ^{ن})^{م} = (-۱)^{م} = -۱ اگر م طاق ہو

(۱۴۷) اگر م اور ن متباین ہوں تو معادلات لا^{م} - ۱ = ۰ اور لا^{ن} - ۱ = ۰ کی کوئی مشترک قیمت سوا واحد کے نہیں ہوسکتی

فرض کہ ع اور ق دو صحیح ایسی ہوں کہ جسمین یہہ ارتباط ہو کہ ع م - ق ن = ۱ ایسے صحاح ہمیشہ جبر مقابلہ کی استعانت سی دریافت ہوسکتی ہین چوالیسواں باب جبر مقابلہ کا دیکھو اور فرض دو نو مساواتوں کی مشترک قیمت ط ہی پس ط^{م} = ۱ اسیواسطے ط^{عم} = ۱ اور ط^{ن} = ۱ اسیواسطے ط^{قن} = ۱ اسی معلوم ہوا کہ ط$^{عم - قن}$ = ۱ یعنی ط = ۱

(۱۴۸) اگر ن عدد اولی ہو اور مساوات لا^{ن} - ۱ = ۰ کی کوئی سی قیمت سہ ہو مگر واحد نہ ہو تو تمام قیمتین مساوات کی اس سلسلہ سہ و سہ^{۲} و سہ^{۳} ... سہ^{ن} سے حاصل ہونگین

اسواسطی کہ بموجب دفعہ ۱۴۵ کے یہہ مقدار تمام قیمتین مساوات کی ہین اسواسطے اب ہم کو صرف یہہ ثابت کرنا باقی رہا کہ ان میں سے کوئی سی دو برابر نہیں ہین اگر برابر ہونا ممکن ہو تو فرض کرو کہ سہ^{ر} = سہ^{ص} پس سہ$^{ر-ص}$ = ۱ پس اسی ثابت ہوا کہ لا^{ن} - ۱ = ۰ اور لا$^{ر-ص}$ - ۱ = ۰ قیمت مشترک سوا واحد کی رکھتی ہین اور یہہ بموجب دفعہ ۱۴۷ کی ناممکن ہے اور چونکہ ر - ص کم بہ نسبت ن کے ہے اسواسطی وہ متباین ہین

(۱۴۹) اگر ن عدد اولی نہ ہو اور سہ کوئی سی قیمت مساوات لا^{ن} - ۱ = ۰ ہو تو بموجب ۱۴۵ کے یہہ تو درست ہی کہ کوئی قوت سہ کی ایک قیمت مساوات کی ہی لیکن یہہ نہیں ہے کہ متواتر قوا سہ سی سب قیمتین مساوات کی ہاتھ لگ جائین تمثیلاً فرض کرو کہ ن = ع ق اور مساوات لا^{ع} - ۱ = ۰ کی قیمت سہ ہی تو مساوات لا^{ن} - ۱ = ۰ کی بھی قیمت سہ ہے

اور علی ہذا القیاس اور قوا د سہ کی کیفیت ہی لیکن سہ کی قوتون کے لینی سی ع مختلف قیمتون سے زیادہ قیمتین نہین لی سکتی اسواسطے کہ $\text{سہ}^{ع+۱} = \text{سہ}^{ع} \times \text{سہ} = \text{سہ}$ اور $\text{سہ}^{ع+۲} = \text{سہ}^{ع} \times \text{سہ}^{۲} = \text{سہ}^{۲}$ اور علی ہذا القیاس پس مساوات $\text{لا}^{ن} - ۱ = ۰$ کی قوا د سہ سے تمام قیمتین نہین ہاتھہ لگ سکتین

اگر ن عدد اولی نہ ہو تو بہی یہہ درست ہی کہ بعض قیمتین مساوات $\text{لا}^{ن} - ۱ = ۰$ کی ایسی خاصیت رکہین کہ اونکی متواتر قیمتون سی تمام قیمتین ہاتھہ لگ جایئن علم مثلثی جملی اگر قیمتون کی جگہہ لین تو یہہ بات اسانی سی ثابت ہو سکتی ہے

(۱۵۰) مساوات $\text{لا}^{ن} - ۱ = ۰$ مین اگر ن مختلف اعداد متباینہ کا حاصل ضرب ہو تو اوسکا حل موقوف اون مساواتون پر ہوگا جنکی صورت متشابہ اسی مساوات کی ہو اور اونمین لا کی قوت نما ن کے اجزا ضربی اوسے ہون

تمثیلاً فرض کرو کہ ن حاصل ضرب تین اجزا ضربی اولی م و ع و ق کا ہو اور سہ قیمت مساوات $\text{لا}^{م} - ۱ = ۰$ کی اور $\text{لا}^{ع} - ۱ = ۰$ کی قیمت صہ ہو اور مساوات $\text{لا}^{ق} - ۱ = ۰$ کی قیمت لر ہو اور یہہ سب قیمتین مختلف واحد سے فرض کی جایئن

اول مساوات $\text{لا}^{ن} - ۱ = ۰$ کی قیمتین اس حاصل ضرب کی رقمین ہونگین

$$(۱ + \text{سہ} + \text{سہ}^{۲} + \cdots + \text{سہ}^{م-۱})(۱ + \text{صہ} + \text{صہ}^{۲} + \cdots + \text{صہ}^{ع-۱})(۱ + \text{لر} + \text{لر}^{۲} + \cdots + \text{لر}^{ق-۱})$$

اسواسطے کہ فرض کرو کہ $\text{سہ}^{ر}\,\text{صہ}^{ص}\,\text{لر}^{ف}$ ایسے رقم کو تعبیر کرین تو $(\text{سہ}^{ر}\,\text{صہ}^{ص}\,\text{لر}^{ف})^{ن} = ۱$ کیونکہ $\text{سہ}^{رن} = ۱$ اور $\text{صہ}^{صن} = ۱$ اور $\text{لر}^{فن} = ۱$ دوم اس حاصل ضرب کی کوئی دو رقمین ایسمین برابر نہین ہین اسواسطے کہ اگر یہہ ممکن تو فرض کرو کہ $\text{سہ}^{ر}\,\text{صہ}^{ص}\,\text{لر}^{ف} = \text{سہ}^{ر'}\,\text{صہ}^{ص'}\,\text{لر}^{ف'}$ تو $\text{سہ}^{ر-ر'} = \text{صہ}^{ص'-ص}\,\text{لر}^{ف'-ف}$ مقدار داہنی طرف قیمت مساوات $\text{لا}^{م} - ۱ = ۰$ کی ہے اور بائین طرف کی مقدار قیمت مساوات $\text{لا}^{ع ق} - ۱ = ۰$ کی ہی لیکن م اور ع ق متباین ہین تو یہہ نا ممکن ہی کہ ان مساواتون کی قیمت مشترک ہو الا واحد یہہ قیمت مستثنے ہے

اگر ن مین اجزا ضربی متباین تین سی زیادہ ہون تو بہی اسی طرح عمل ہوگا

کی مشترک قیمت سوا واحد کے نہین ہوسکتی

(۱۵۳) عملاً دفعہ بالا کچہہ عظمت نہین رکہتی اسلئی کہ جو اعمال اوسمین کرنے پڑتے ہین وہ علی العموم نہین ہوسکتی فرض کرو کہ مساوات لا^م - ۱ = ۰ کو حل کرسکتے ہین اور سہ کو دریافت کرتی ہین تو تمام مقادیر ا و سہ و سہ^۲ و . . . سہ^م-۱ قیمتین مساوات لا^ن - ۱ = ۰ کی تو اسطرح ہم کو م قیمتین دریافت ہوجائینگے لیکن صہ کے دریافت کرنی کی واسطے ہم مساوات لا^م - سہ = ۰ کو حل کرین یعنی م√سہ کو دریافت کرین اسمین سہ = م√۱ اور اس دریافت کرنے کے واسطی کوئی ترکیب جبرمقابلہ مین نہین ہے

مثلاً مساواتین لا^۳ - ۱ = ۰ اور لا^۵ - ۱ = ۰ کو اگر ہم حل کرلین تو مساوات لا^۱۵ - ۱ = ۰ کی بہی تمام حل بموجب دفعہ ۱۵۰ کی حاصل ہوجائینگے مگر ہم عملاً مساوات لا^۹ - ۱ = ۰ یا لا^۲۵ - ۱ = ۰ کو بموجب دفعہ ۱۵۲ کے نہین حل کرسکتی ہم کو صرف تین قیمتین مساوات اول کی اور پانچ قیمتین مساوات دوم کی حاصل ہونگین

(۱۵۴) معادلات لا^ن - ۱ = ۰ اور لا^ن + ۱ = ۰ کی عملی حل کرنی کی ترکیب ہم لکہتی ہن اسمین ن بہت بڑا نہین ہے اگر ن کوئی قوت ۲ کی ہو تو ان مساواتون کے حل مکرر جذر نکالنی سی دریافت کرلینگے اور اصم ثنائی کی باربار جذر نکالنی کی ترکیب جبرمقابلہ مین لکہی ہے دفعہ ۲۸ کو دیکہو

پس اس صورت مین تمام قیمتین معلوم ہوجائینگین اگر ن = ع م اسمین ع = ۲^ر تو لا^ع = ی کے فرض کرو تو مساواتین لا^ن - ۱ = ۰ اور لا^ن + ۱ = ۰ کی یہہ ہوجائینگین کہ ی^م - ۱ = ۰ اور ی^م + ۱ = ۰ پس اگر ی معلوم ہوجاے تو لا اسطرح دریافت ہوگا کہ ہم ر دفعہ مکرر جذر نکالین

(۱۵۵) مساوات لا^ن - ۱ = ۰ مین فرض کرو کہ ن طاق عدد ہی یعنی ن = ۲م + ۱ تو مساوات لا^۲م+۱ - ۱ = ۰ کی ایک حقیقی قیمت ہوگی یعنی + ۱ اسواسطے کہ اوسکی کوئی منفی قیمت نہین ہے اور اگر لا کو برابر کسی مقدار کے سواے واحد کی قرار دین تو لا^۲م+۱ کبہی واحد کی

برابر نہیں ہوگا پس معلوم ہوا کہ مساوات کی حقیقی قیمت ایک ہی ہی لا۲م+۱ - ۱ کو لا - ۱ پر تقسیم کرو تو مساوات مختصر اور تحویل ہو کر یہہ پیدا ہوگی جسکو حل کرنا چاہی کہ

لا۲م + لا۲م-۱ + لا۲م-۲ + ۰۰۰ + لا۲ + لا + ۱ = ۰

یہہ مساوات متکافیہ ہی اور اسکا حل م درجہ کی مساوات کے حل پر موقوف ہے

(۱۵۶) مساوات لان - ۱ = ۰ فرض کرو کہ ن جفت ہی اور ن = ۲م تو مساوات کے حقیقی قیمتیں صرف دو + ۱ اور - ۱ ہیں اور لان - ۱ کو لا - ۱ اور لا + ۱ کے حاصل ضرب لا۲ - ۱ پر تقسیم کرتے ہیں پس جو مساوات حل کرنی پڑیگی وہ یہہ مختصر اور تحویل ہو کر حاصل ہوگی

لا۲م-۲ + لا۲م-۴ + ۰۰۰ + لا۲ + ۱ = ۰

یہہ مساوات متکافیہ ہی اور اوسکا حل م - ۱ درجہ کی مساوات کی حل پر موقوف ہے

مساوات لان - ۱ = ۰ کو (لام - ۱) (لام + ۱) = ۰ کی صورت میں لکھکر ہم عمل آسانی سی کر سکتی ہیں اور پھر اسکو تحلیل ان مساواتوں لام - ۱ = ۰ اور لام + ۱ = ۰ میں کر لیں یا اوس ترکیب کو عمل میں لائیں جو دفعہ ۱۴۸ میں بیان ہوئی

(۱۵۷) مساوات لان + ۱ = ۰ میں فرض کرو کہ ن طاق ہی اور ن = ۲م + ۱ اور مساوات لا۲م+۱ + ۱ = ۰ کی صرف ایک حقیقی قیمت یعنی - ۱ ہی اور لا۲م+۱ + ۱ کو لا + ۱ پر تقسیم کریں تو مساوات مختصر تحویل ہو کر حل کرنی کی واسطی یہہ پیدا ہوگی کہ

لا۲م - لا۲م-۱ + لا۲م-۲ - ۰۰۰ + لا۲ - لا + ۱ = ۰

یہہ مساوات متکافیہ ہی اور اسکا حل م درجہ کی مساوات کے حل پر موقوف ہے

اگر ن طاق مساوات لان + ۱ = ۰ میں ہو اور ہم لا کو - لا سی تبدیل کریں تو مساوات لان - ۱ = ۰ حاصل ہوگی اگر ہم چاہیں تو اس دوسری مساوات کو حل کریں اور جو قیمتیں نکلیں اونکی علامتیں بدل دیں تو اول مساوات کا حل حاصل ہو جائیگا

(۱۵۸) اگر مساوات لان + ۱ = ۰ میں ن جفت فرض کریں تو مساوات کی کوئی حقیقی

(۲) $لا^{۴} + ۱ = ۰$ میں $لا + \frac{۱}{لا} = ی$ کے رکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ $ی^{۲} - ۲ = ۰$

پس $ی = \pm \sqrt{۲}$

اسیواسطے $لا^{۴} + ۱ = (لا^{۲} + لا\sqrt{۲} + ۱)(لا^{۲} - لا\sqrt{۲} + ۱)$

ان دوم درجوں کی مساواتوں کی قیمتوں کی دریافت کرنی سے حل کامل ہو جایگا

(۳) $لا^{۵} - ۱ = ۰$ اسی حاصل ہوتا ہی کہ $(لا - ۱)(لا^{۴} + لا^{۳} + لا^{۲} + لا + ۱) = ۰$

اسی معلوم ہوتا ہی کہ مساوات $لا^{۲} + \frac{۱}{لا^{۲}} + لا + \frac{۱}{لا} + ۱ = ۰$ یعنی

$ی^{۲} + ی - ۱ = ۰$ کی حل ہونی چاہی پس $ی = \frac{-۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$

اسیواسطے $لا^{۵} - ۱ = (لا - ۱)\left(لا^{۲} + لا\frac{-۱ - \sqrt{۵}}{۲} + ۱\right)\left(لا^{۲} + لا\frac{-۱ + \sqrt{۵}}{۲} + ۱\right)$

ان دوم درجہ کی مساواتوں کے حل کرنی سے کامل حل ہو جایگا اور قیمتوں کی علامتیں بدل دیں

تو وہ مساوات $لا^{۵} + ۱ = ۰$ کی قیمتیں بنجائینگی

(۱۶۱) اگر ہم مساوات $لا^{۶} - ۱ = ۰$ کی حل کرنی میں کوشش کریں تو ہم کو مساوات ی کی تیسری درجہ کی حاصل ہوگی اور اگر مساوات $لا^{۸} - ۱ = ۰$ کے حل کرنے میں سعی کریں تو ی کی چوتھی درجہ کی مساوات حاصل ہوگی اب اگلی دو بابوں میں بتلائینگے کہ تیسری اور چوتھی درجہ کی مساواتیں کسطرح حل ہوتی ہیں یہہ بات معلوم ہو جائیگی کہ حل کی ترکیبیں عملاً کسی کام کی نہیں ہوتیں جبکہ معادلات جنکو حل کرتی ہیں تمام حقیقی قیمتیں رکھتی ہوں جیسی کہ یہاں صورت ہی جسپر بحث موافق دفعہ ۱۵۹ کے ہم کرتے ہیں

(۱۶۲) اگر مساوات $لا^{۲ن} + ع لا^{ن} + ق = ۰$ کی صورت کی ہو تو ہم مساوات درجہ دوم کے موافق حل کرکی $لا^{ن}$ کی قیمتیں دریافت کرتی ہیں اور پہر موافق اس باب کی ترکیبوں کے لا کی قیمتیں دریافت ہو سکتی ہیں

اب یہاں ہم ایک دعوی دو مقادیر اصم کی حاصل ضرب کے باب میں ثابت کرکی اس باب کو ختم کرتی ہیں۔

(۱۶۳) فرض کرو کہ ا اور ب دو مقادیر جبریہ ہوں اور م اور ن صحاح مثبتہ ہوں تو ہم ا

کی م مختلف قیمتیں ہونگیں اور $\sqrt[ن]{ب}$ کی ن مختلف قیمتیں موافق دفعہ ۱۴۲ کے ہونگیں
اسی معلوم ہوا کہ $\sqrt[م]{ا}$ اور $\sqrt[ن]{ب}$ کی حاصل ضرب کی م ن مختلف قیمتوں سے زیادہ قیمتیں نہیں ہو سکتیں
اور اب ہم یہہ ثابت کرینگے کہ اوسکی اتنی قیمتیں نہیں ہو سکتیں بشرطیکہ م اور ن متباین نہ ہوں
اور اس دعوی سے پہلے اس دعوی کو ثابت کرینگے کہ $\sqrt[م]{ا}$ اور $\sqrt[ن]{ب}$ کی حاصل ضرب کے مختلف
قیمتیں م اور ن کی ذو اضعاف اقل کی برابر ہوتی ہیں

فرض کرو کہ $\sqrt[م]{ا}$ کی قیمتوں میں سے ایک قیمت ط ہو تو تمام قیمتیں $\sqrt[م]{ا}$ کی ط $\sqrt[م]{۱}$ میں شامل ہونگیں
اور فرض کرو کہ $\sqrt[ن]{ب}$ کی قیمتوں میں سے ص ایک قیمت ہو تو $\sqrt[ن]{ب}$ کی تمام قیمتیں ص $\sqrt[ن]{۱}$ میں
داخل ہونگیں اسی معلوم ہوا کہ تمام قیمتیں حاصل ضرب کے ط ص × $\sqrt[م]{۱} \times \sqrt[ن]{۱}$ میں داخل ہیں اور
اسیواسطے حاصل ضرب کے مختلف قیمتوں کی تعداد وہی ہوگی جو $\sqrt[م]{۱} \times \sqrt[ن]{۱}$ کی ہے فرض کرو
کہ م اور ن کا ذو اضعاف اقل ل ہے تو $(\sqrt[م]{۱} \times \sqrt[ن]{۱})^{ل} = ۱$
پس $\sqrt[م]{۱} \times \sqrt[ن]{۱}$ برابر واحد کے ل مرتبہ کے نزول کی ہے اسواسطے ل مختلف قیمتوں سے
زیادہ قیمتیں نہیں ہو سکتیں

لیکن ہم کو یہہ ثابت کرنا باقی رہا کہ $\sqrt[م]{۱} \times \sqrt[ن]{۱}$ فی الحقیقت ل مختلف قیمتیں رکھتا ہے
فرض کرو کہ ع وفق اعظم م اور ن کا ہے اور $\frac{م}{ع}$ = لو پس $\sqrt[لو]{۱}$ کی لو قیمتیں $\sqrt[م]{۱}$
کی م قیمتوں میں داخل ہیں اور $\sqrt[م]{۱} \times \sqrt[ن]{۱}$ کی ل قیمتیں اسطرح حاصل ہو سکتی ہیں کہ $\sqrt[لو]{۱}$ کی
لو قیمتوں اور $\sqrt[ن]{۱}$ کی ن قیمتوں کے حاصل ضرب کے مختلف ارقام لیں اور یہہ ل قیمتیں سب مختلف ہونگیں اسواسطے کہ
فرض کرو لو قیمتوں میں سے دو قیمتیں $س_۱$ اور $س_۲$ ہیں اور ن قیمتوں میں سے $ص_۱$ اور $ص_۲$ دو قیمتیں ہیں تو $س_۱ ص_۱$
برابر $س_۲ ص_۲$ کی نہیں ہو سکتا اسواسطے کہ اگر $س_۱ ص_۱ = س_۲ ص_۲$ تو $\frac{س_۱}{س_۲} = \frac{ص_۲}{ص_۱}$ دائیں طرف کا رکن
ایک قیمت مساوات $لا^{لو} - ۱ = ۰$ کی ہے اور بائیں طرف کا رکن ایک قیمت مساوات $لا^{ن} - ۱ = ۰$ کا ہے
اور ان مساواتوں کی کوئی قیمت مشترک سوا واحد کے بموجب دفعہ ۱۴۷ کے نہیں ہو سکتی

(۱۴۷) بعض اوقات دفعہ گذشتہ کے اصل اصول اسطرح بیان کئے جاتے ہیں کہ ہم کو معلوم ہے کہ $\sqrt[م]{ا} \times \sqrt[ن]{ب} = \sqrt[م ن]{ا^{ن} ب^{م}}$ اور

اگر $\frac{م+ن}{م ن}$ کو مختصر الحدین بتائین تو شمار کنندہ ایک صحیح عدد ہوگا اور اور نسب نما ر ہوگا اسطرح $\frac{م+ن}{ا م ن} = \frac{1}{ا ر}$ اور اسکی مختلف قیمتین ہین یہہ ترکیب ثابت کی مضمحل ہی کیونکہ جبر مقابلہ مین جو معمولی مسئلہ مقادیر اصم کا لکہا گیا ہی وہ مقادیر اصم کی حسابیہ قیمتون کے واسطی ثابت کیا گیا ہی اسواسطے اوسی یہہ ارتباط $\frac{1}{ا م} + \frac{1}{ا ن} = \frac{م+ن}{ا م ن}$ موافق اوس معنی کے جو یہان لی گئی ہین نہین ثابت ہوتا ہے

بارہوان باب معادلات مکعبی

(۱۶۵) مساوات درجہ دوم کی حل کرنے کی بابمین بحث کرنی یہان فضول ہی اسلئی کہ اوسکا مفصل حال جبر مقابلہ مین بیان ہوچکا ہی اس باب مین فقط درجہ سوم کی مساواتون کی جنکو معادلات مکعبی کہتے ہین بحث ہوگی

دفعہ ۱۵۸ مین ہم نی یہہ ثابت کیا ہی کہ مساوات مفروضہ کی ایسی ہیئت بدل سکتی ہے کہ اوسمین دوسری رقم معدوم ہو، جس مساوات مکعبی مین دوسری رقم نہ ہو اوسکی قیمتون کی بہت صفات جملی بہ نسبت کامل مساوات مکعبی کے قیمتون کی ہوتی ہین اسلئی ہم یہہ فرض کرلیتی ہین کہ جن مکعبی مساواتون کو ہم حل کرتی ہین انمین دوسری رقم نہین ہے جس عمل کو اب ہم لکہینگے اوسکا نام کارڈن کا حل مکعبی مساوات کا ہے

(۱۶۶) مساوات $لا^3 + ق لا + ر = 0$ کو حل کرو

فرض کرو کہ $لا = د + ی$ اور د اور ی بالفعل دو مقادیر مجہول ہین

اسکو مساوات مفروض مین لا کی جگہ رکہو تو

$$(د+ی)^3 + ق(د+ی) + ر = 0$$

یعنی $$د^3 + ی^3 + (3 د ی + ق)(د+ی) + ر = 0$$

ہم نی صرف دو مقادیر د اور ی کی بابمین ایک یہہ بات فرض کی ہی کہ اونکا مجموعہ مساوات مفروضہ کی ایک قیمت ہو اسلئی ہم کو اختیار ہی کہ کوئی دوسری بات بہی اونکی بابمین فرض کرین وہ دو مقدارین مجہول ہین اونکی واسطی دو شرائط مقرر کرسکتی ہین پس فرض کرو کہ $3 د ی + ق = 0$

تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$د^{3} + ی^{3} + ر = ۰$$

ی کی قیمت ارقام ۂ مین مندرج کرو تو

$$د^{3} - \left(\frac{ق}{۳د}\right)^{3} + ر = ۰$$

یعنی $$د^{6} + ر د^{3} - \frac{ق^{3}}{۲۷} = ۰$$

اسی معلوم ہوا کہ $$د^{3} = -\frac{ر}{۲} \pm \sqrt{\frac{ر^{2}}{۴} + \frac{ق^{3}}{۲۷}}$$

اور $$ی^{3} = -ر - د^{3} = -\frac{ر}{۲} \mp \sqrt{\frac{ر^{2}}{۴} + \frac{ق^{3}}{۲۷}}$$

اور نیز لا = د + ی اب ہم $د^{3}$ اور $ی^{3}$ کے قیمتون مین اوپر کی علامت لین تو اور نیچی کی لین تو دونو صورتون مین ایک ہی نتیجہ حاصل ہوگا صفائی کی واسطی ہم اوپر ہی کی علامت لیتے ہین تو

$$لا = \left[-\frac{ر}{۲} + \sqrt{\frac{ر^{2}}{۴} + \frac{ق^{3}}{۲۷}}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[-\frac{ر}{۲} - \sqrt{\frac{ر^{2}}{۴} + \frac{ق^{3}}{۲۷}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

پس لا کے واسطی جو جملہ ہی اوسمین دو جزر الکعب ہین اور ہر مقدار کے تین جزر الکعب ہین تو اب ہم کو یہہ دریافت کرنا چاہئی کہ بالفعل کونسی جزر الکعب لینی چاہئی فرض کرو کہ

$$سہ = \frac{1}{2}\left(-۱ + \sqrt{-۳}\right)$$

تو بموجب دفعہ ۱۶۰ ا کے اگی تین جزر الکعب ۱ اور سہ اور $سہ^{2}$ ہین اب فرض کرو کہ $-\frac{ر}{۲} + \sqrt{\frac{ر^{2}}{۴} + \frac{ق^{3}}{۲۷}}$ مکعبون مین سی ایک جزر الکعب م ہی تو او جزر الکعب م سہ اور م $سہ^{2}$ ہونگے اور $-\frac{ر}{۲} - \sqrt{\frac{ر^{2}}{۴} + \frac{ق^{3}}{۲۷}}$ کے جزر الکعبون مین سی ایک جزر الکعب کو ن تعبیر کرتا ہی تو او جزر الکعب ن سہ اور ن $سہ^{2}$ ہین

لا کے جملے مین جو جزر الکعب واقع ہوئی ہین اونمین سی ہر یک کی واسطی اوسکی تین قیمتون مین سے ہر یک قیمت لگائین تو ہم کو کل ۹ قیمتین حاصل ہونگین لیکن مکعبی مساوات کی صرف تین قیمتین ہوتی ہین تو اسی یہہ نتیجہ نکلتا ہی کہ اون ۹ قیمتون مین سی صرف تین قیمتین مساوات مین دخل رکھتی ہین اور باقی خارج ہین اور فی الحقیقت عمل حل مین $د ی = -\frac{ق}{۳}$

ایک شرط ہی پس جو قیمتین اس شرط کو پورا کریں وہی قیمتیں مساوات میں دخل رکھتی ہیں
فرض کرو کہ م اور ن ایسی مقرر کئی گئی ہیں کہ وہ شرط م ن = − $\frac{ق}{۳}$ کو پورا کرتے ہیں
تو ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ ر = م اور ی = ن کے قیمتیں دخل پذیر ہونگیں اور ر = سم
اور ی = س۲ ن کی بھی حاصل ہوگا اور ر = س۲ م اور ی = س ن کے بھی حاصل ہوگا
کیونکہ دونو صورتوں میں ارتباط ری = − $\frac{ق}{۳}$ کی شرائط پوری ہوتی ہیں مگر کوئی اور زوج
قیمتوں کا داخل نہیں ہوسکتا تمثیلاً فرض کرو کہ ر = م اور ی = س ن تو ری = − $\frac{سق}{۳}$
کی حاصل ہوگا اور − $\frac{ق}{۳}$ کی برابر نہیں حاصل ہوگا اور ایسی ہی اور زوج قیمتوں سی
ری = − $\frac{سق}{۳}$ یا = − $\frac{س۲ق}{۳}$ کے حاصل ہوگا اور − $\frac{ق}{۳}$ نہیں حاصل ہوگا
اسلئی سوا ان ازدواج قیمتوں کی جنکی دخل کی کیفیت اوپر بیان کرائی ہیں اب کوئی زوج
قیمتوں کا شرائط کو ایفا نہیں کریگا

(۱۶۷) تمثیلاً فرض کرو کہ لا۳ + ۶لا − ۲۰ = ۰ یہاں ق = ۱۶ اور ر = − ۲۰ پس

$$لا = (۱۰ + \sqrt{۱۰۸})^{\frac{1}{۳}} + (۱۰ - \sqrt{۱۰۸})^{\frac{1}{۳}}$$

عددی حساب لگانے سے یہہ حاصل ہوگا کہ

$$(۱۰ + \sqrt{۱۰۸})^{\frac{1}{۳}} = ۲٫۷۳۲ \quad اور \quad (۱۰ - \sqrt{۱۰۸})^{\frac{1}{۳}} = -۰٫۷۳۲$$

پس اسی ہم گمان کرتی ہیں کہ لا = ۲ کے ہوگا اور امتحان سی یہہ معلوم بھی ہوگا کہ لا = ۲ کی ہی
اب اور دو قیمتوں کی بیان کرنی کی واسطی موافق دفعہ گذشتہ کی عمل کرنے کیلئے یہہ بہتر ہوگا
کہ ہم مساوات کا تنزل مساوات درجہ دوم کی طرف کریں چونکہ ۲ قیمت مساوات
مفروضہ کی ہی اسلئی لا۳ + ۶لا − ۲۰ پورا لا − ۲ پر تقسیم ہوگا اور یہہ ہم کو دریافت ہوگا کہ

$$لا^۳ + ۶لا - ۲۰ = (لا - ۲)(لا^۲ + ۲لا + ۱۰)$$

اسواسطے باقی دو قیمتیں مساوات کی اس مساوات

$$لا^۲ + ۲لا + ۱۰ = ۰$$

کے حل کرنے سے یہہ دریافت ہوگئیں کہ

$-1 \pm \sqrt{-9}$ اور $-1 \pm 3\sqrt{-1}$

مثال گذشتہ مین ہم امتحان سی یہہ ثابت کرتے ہین کہ

$(10 + \sqrt{-108})^{\frac{1}{3}} = 1 + \sqrt{-3}$ اور $(10 - \sqrt{-108})^{\frac{1}{3}} = 1 - \sqrt{-3}$

پس اسطرح قیمت ۲ تعبیر نزول لکالنی کی دریافت ہوگئی کوئی عمل جبریہ اب نہیں ہے کہ اوسی علی العموم جزء الکعب اس جملہ $ا + \sqrt{ب}$ کی صورت کا محدود صورت مین نکال لین دفعہ ۳۱۰ جبر مقابلہ کی دیکھو اصلی $(ا + \sqrt{ب})^{\frac{1}{3}}$ کی قیمت دریافت کرنی کی واسطی ضابطہ جملہ ثنائی کو کام مین لا کر لاانتہا سلسلہ دریافت کرتی ہین اور اس حالت مین اگر $\sqrt{ب}$ کم ا سے ہو تو اس سلسلہ کی انضمامی بنانی کی واسطی سلسلہ کو قوا متصاعدہ مین پہیلائین اور اگر $\sqrt{ب}$ بڑا ا سے ہو تو سلسلہ کو ا کی قوا متصاعدہ مین پہیلائین جبر مقابلہ کا باب ۱۳۶ اور ۴۰ دیکھو

(۱۶۸) دفعہ ۱۶۶ مین ہم نی لکھا ہی کہ گو لا کی واسطی بظاہر نو قیمتین نکلتی ہین مگر اونمین سی تین مساوات مین دخل رکھتی ہین اور باقی خارج ہین اب ان نو قیمتون کی واقع ہونی کی دلیل یہہ ہی کہ ارتباط ی ی = $-\frac{ق}{۳}$ فرض کیا گیا تہا اور پہر اوسکی صورت عمل کے اندر $ی^۳ ی^۳ = -\frac{ق^۳}{۲۷}$ مین تبدیل کی گئی تہی اب اس اخر ارتباط مین کچہہ تبدل نہ ہوگا اگر

ق بدل کیسی سہ یا ق سہ۲ ہوگا پس مساوات $لا^۳ + ق لا + ر = ۰$ کے حل کرنے مین نو حل ہم کو دریافت ہوتی ہین اونمین سی تین تو اس مساوات سی متعلق ہوتی ہین اور تین مساوات $لا^۳ + ق سہ لا + ر = ۰$ سی اور تین مساوات $لا^۳ + ق سہ^۲ لا + ر = ۰$ سے

(۱۶۹) مکعبی مساوات مفروضہ کی قیمتون کی صورت پر اب ہم خاص بحث کرتے ہین ق اور ر کو ہم اصلی مقادیر فرض کرینگے $ی^۳$ اور $ی^۳$ کے واسطی جملی کیا تو اصلی ہون گے یا خیالی اول فرض کرو کہ یہہ جملی اصلی ہین تو $ی^۳$ اور $ی^۳$ کے جزء الکعبوں کی حسابی قیمتون کو فرض کرو کہ م اور ن تعبیر کرتی ہین تو مکعبی مساوات مفروض کی ۱۳ صورتون مین یقینی ایک اصلی قیمت یعنی م + ن ہو گے

اور باقی دو قیمتین م سہ + ن سہ^۲ اور م سہ^۲ + ن سہ ہونگین اور سہ کی قیمت مندرج کرنے سے جدا گانہ یہہ قیمتین ہونگین کہ

− ½ (م + ن) + ½ (م − ن) √−۳

اور − ½ (م + ن) − ½ (م − ن) √−۳

اور یہہ تخیلی قیمتین ہین بشرطیکہ م = ن کے نہ ہو اور جب م = ن تو مکعبی مساوات کی دو برابر قیمتین ہونگین اور ہر یک انمین سے برابر −م یا −ن کے ہوگی اس شرط ضروری جسسے یہہ تحقیق ہوجاوے کہ م = ن یعنی ی^۳ = ی^۳ کے یہہ ہی کہ ر^۲/۴ + ق^۳/۲۷ = −

بالعکس اسکے اگر مکعبی مساوات کی قیمتین تمام اصلی ہون اور غیر مساوی ہون تو ی^۳ اور ی^۳ کی جملی تخیلی ہونگی یہہ فرض کرو کہ ی^۳ اور ی^۳ کی جملی خیالی ہین یعنی فرض کرو کہ ر^۲/۴ + ق^۳/۲۷ منفی مقدار ہی تو بموجب دفعہ ۱۴۲ کی ہم کو یہہ دریافت ہوگا کہ ی^۳ اور ی^۳ مین سے ہر یک کا جزر الکعب خاص صورت کا ہوگا اسیواسطے ہم فرض کرتی ہین کہ م = لو + مو √−۱ اور چونکہ ی^۳ اور ی^۳ مین فرق علامت جذر مین ہے اسلئے ن = لو − مو √−۱ اس صورت مین مکعبی مساوات مفروضہ کی تمام اصلی قیمتین ہین یعنی

لو + مو √−۱ + لو − مو √−۱ یعنی ۲ لو ہے

(لو + مو √−۱) سہ + (لو − مو √−۱) سہ^۲ یعنی − لو − مو √۳

اور (لو + مو √−۱) سہ^۲ + (لو − مو √−۱) سہ یعنی − لو + مو √۳

(۱۷۰) مکعبی مساوات کا حل جو کارڈن صاحب کا ہی اوسے عملاً ایسی صورت مین کچھہ فایدہ نہین حاصل ہوتا کہ مساوات کی سب قیمتین اصلی اور غیر مساوی ہون اسواسطے کہ اس حالت مین جملی ی^۳ اور ی^۳ کے تخیلی ہوتی ہین اور گو ہم اس بات کو جانتی ہین کہ اونکی جزر الکعب وجود رکھتی ہین مگر کوئی ترکیب اونکی نکالنی کی ازروی علم حساب نہین ہی پس ایسی صورت مین ہم کو قیمتین صورت جبریہ مین معلوم ہوجاتی ہین مگر اونکا حساب عددی نہین ہوسکتا اسلئی وہ حساباً کچھہ وقعت نہین رکھتی تمثیلاً یہہ مساوات لو کہ

$$\text{لا}^{۳} - ۱۵\,\text{لا} - ۴ = ۰$$

یہاں ر = −۴ اور ق = −۱۵ اس سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{لا} = \left(۲ + \sqrt{-۱۲۱}\right)^{\frac{۱}{۳}} + \left(۲ - \sqrt{-۱۲۱}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

یعنی

$$\text{لا} = \left(۲ + ۱۱\sqrt{-۱}\right)^{\frac{۱}{۳}} + \left(۲ - ۱۱\sqrt{-۱}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

اب یہاں ظاہر ہی کہ کوئی جزر الکعب نکالنی کا طریق نہیں ہی امتحان سی یہہ ثابت ہوتا ہی کہ

$$\left(۲ + ۱۱\sqrt{-۱}\right)^{\frac{۱}{۳}} = ۲ + \sqrt{-۱}$$

$$\left(۲ - ۱۱\sqrt{-۱}\right)^{\frac{۱}{۳}} = ۲ - \sqrt{-۱}$$

$$\text{پس لا} = ۲ + \sqrt{-۱} + ۲ - \sqrt{-۱} = ۴$$

پس ۴ قیمت ہی اب اور قیمتیں دفعہ ۱۶۷ سی دریافت ہو سکتی ہین یا اسطرح عمل کرنی سی کہ

$$\text{لا}^{۳} - ۱۵\,\text{لا} - ۴ = (\text{لا} - ۴)(\text{لا}^{۲} + ۴\,\text{لا} + ۱)$$

پس ہم کو یہہ مساوات حل کرنی پڑیگی کہ $\text{لا}^{۲} + ۴\,\text{لا} + ۱ = ۰$ اور اسکی قیمتیں $-۲ \pm \sqrt{۳}$ ہین

اب مساوات $\text{لا}^{۳} - ۳\sqrt[۳]{۲}\,\text{لا} - ۲ = ۰$ پر خیال کرو

یہاں ر = −۲ اور ق = $-۳\sqrt[۳]{۲}$ پس

$$\text{لا} = \left(۱ + \sqrt{-۱}\right)^{\frac{۱}{۳}} + \left(۱ - \sqrt{-۱}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

یہہ امتحان سے ثابت ہوتا ہے کہ

$$\left(۱ + \sqrt{-۱}\right)^{\frac{۱}{۳}} = \frac{۱ + \sqrt{۳}}{۲\sqrt[۳]{۲}} + \frac{۱ - \sqrt{۳}}{۲\sqrt[۳]{۲}}\sqrt{-۱}$$

$$\left(۱ - \sqrt{-۱}\right)^{\frac{۱}{۳}} = \frac{۱ + \sqrt{۳}}{۲\sqrt[۳]{۲}} - \frac{۱ - \sqrt{۳}}{۲\sqrt[۳]{۲}}\sqrt{-۱}$$

$$\text{پس لا} = \frac{۱ + \sqrt{۳}}{۲\sqrt[۳]{۲}} + \frac{۱ - \sqrt{۳}}{۲\sqrt[۳]{۲}}\sqrt{-۱} + \frac{۱ + \sqrt{۳}}{۲\sqrt[۳]{۲}} - \frac{۱ - \sqrt{۳}}{۲\sqrt[۳]{۲}}\sqrt{-۱} = \frac{۱ + \sqrt{۳}}{\sqrt[۳]{۲}}$$

اور باقی قیمتیں دریافت ہو سکتی ہین اور وہ یہہ ہین کہ

$$\frac{۱ - \sqrt{۳}}{\sqrt[۳]{۲}} \quad \text{اور} \quad -\frac{۲}{\sqrt[۳]{۲}}$$

(۱۷۱) جو صورت مکعبی مساوات کی ایسی ہو کہ اسکی تین قیمتیں اصلی اور غیر مساوی ہوں اُس صورت کو معدوم التحویل کہتے ہین

اور بعض اوقات یہہ کہتی ہین کہ اس صورت مین قاعدہ کارڈن کا نہین چلتا ان جملون سی یہہ بات
معلوم ہوتی ہی کہ جسمین ایسی صورت تین نمایان ہوتی ہین کہ اونکی جانچ لگانی مین بڑی دقت اور دشواری
عاید ہوتی ہی لیکن ضابطہ جملہ ثنائی کی استعانت سی جملہ ع + ق $\sqrt{-1}$ کی صورت کی جملہ کی تقریبی قیمت
ہم دریافت کرتی ہین اگر ق تعداداً چھوٹا ع سی ہو تو (ع + ق $\sqrt{-1}$)$^{\frac{1}{3}}$ کو سلسلہ انضمامی مین
موافق قواعد مقاصد ق $\sqrt{-1}$ کے پہلا ئین جبر مقابلہ ۳۴۴ باب دیکھو پس
(ع + ق $\sqrt{-1}$)$^{\frac{1}{3}}$ کو تقریباً عَ + قَ $\sqrt{-1}$ کے صورت مین لا سکتی ہین
اور (ع - ق $\sqrt{-1}$)$^{\frac{1}{3}}$ کو تقریباً عَ - قَ $\sqrt{-1}$ کی صورت مین
اور مجموعہ ان جزر الکعبون کا ۲عَ ہوگا لیکن اگر ق تعداداً بڑا ع سی ہو تو ہم اسطرح عمل کرین کہ

ع + ق $\sqrt{-1}$ = $\sqrt{-1}$ (ق - ع $\sqrt{-1}$)

اسی معلوم ہوا کہ (ع + ق $\sqrt{-1}$)$^{\frac{1}{3}}$ = ($\sqrt{-1}$)$^{\frac{1}{3}}$ (ق - ع $\sqrt{-1}$)$^{\frac{1}{3}}$

اب - $\sqrt{-1}$ کا جزر الکعب امتحان سی $\sqrt{-1}$ معلوم ہوتا ہی پس یہہ حاصل ہوگا

(ع + ق $\sqrt{-1}$)$^{\frac{1}{3}}$ = - $\sqrt{-1}$ (ق - ع $\sqrt{-1}$)$^{\frac{1}{3}}$

اور ہم (ق - ع $\sqrt{-1}$)$^{\frac{1}{3}}$ کو سلسلہ انضمامی مین قواعد مقاصد ع $\sqrt{-1}$ کی پہلا سکتی ہین
اور پہر موافق سابق کی مجموعہ ع + ق $\sqrt{-1}$ اور ع - ق $\sqrt{-1}$ کا دریافت کر سکتی ہین
یہہ صورت کہ ع = ق کے دفعہ گذشتہ کی دوسرے مثال مین شامل ہی
اس بات پر بہی غور کرنی چاہیی کہ ضابطہ ڈی موئور کے وساطت سی مقدار ع + ق $\sqrt{-1}$ کا جزر الکعب
اسی صورت مین بیان ہو سکتا ہے کہ اوسمین علم مثلثی جملے ملتف ہون
(۱۷۲) دفعات گذشتہ سی ظاہر ہوتا ہے کہ مکعبی مساوات لا^{3} + ق لا + ر = ۰ ہمیشہ کارڈس کے
عمل سی حل ہو سکتی ہی اور جب ق مساوات مین مثبت ہو تو کچہہ دقت اوسمین نہین واقع ہوتی اور جب
ق منفی ہو اور اوسکی ساتہہ ق^{3} تعداداً چھوٹی $\frac{27 ر^{2}}{4}$ سی ہو تو ان صورتون مین
قیمتین خیالی ہونگین اگر ق^{3} ایک منفی مقدار ہو اور تعداداً بڑی $\frac{27 ر^{2}}{4}$ سی ہو تو کاردن

کے حل مین بڑی دقت ہوتی ہی اور اس صورت مین تمام قیمتین اصلی ہین
اگر ق^۳ منفی ہو اور تعداداً برابر $\frac{۲۷ ر^۲}{۴}$ ہو تو $\frac{ر^۲}{۴} + \frac{ق^۳}{۲۷} = ۰$ تو بموجب دفعہ ۶۰ کے
اوسکی قیمتین برابر ہونگیں بموجب دفعہ ۱۶۶ کے اس صورت مین م = ن = $\sqrt[۳]{-\frac{ر}{۲}}$
اور تینون قیمتین ۲م اور − م اور − م ہین

جس صورت مین مکعبی مساوات کی قیمت ایک معلوم ہوجائے تو مکعبی مساوات کا تنزل مساوات درجہ دوم کی طرف کرلین اور اس مساوات درجہ دوم سی دو قیمتین دریافت کرلین اور دفعات گذشتہ کی ترکیب سے قیمتون کو نہ دریافت کرین

(۱۷۳) کامل مکعبی مساوات کی حل کرنی مین جو نتایج حاصل ہوتے ہین اوسکا مختصر بیان کرتی ہین فرض کرو کہ مساوات

$$لا^۳ + ا لا^۲ + ب لا + س = ۰$$

مین فرض کرو کہ $لا = ی - \frac{ا}{۳}$ تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ی^۳ + ق ی + ر = ۰$$

اسمین $ق = ب - \frac{ا^۲}{۳}$ اور $ر = س - \frac{ا ب}{۳} + \frac{۲ ا^۳}{۲۷}$
اب بموجب ترکیب کارڈن کے

$$لا = \left(-\frac{ر}{۲} + \sqrt{\frac{ر^۲}{۴} + \frac{ق^۳}{۲۷}}\right)^{\frac{۱}{۳}} + \left(-\frac{ر}{۲} - \sqrt{\frac{ر^۲}{۴} + \frac{ق^۳}{۲۷}}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

اسسے یہہ دریافت ہوتا ہے کہ

$$\frac{ر^۲}{۴} + \frac{ق^۳}{۲۷} = \frac{س^۲}{۴} - \left(\frac{ا^۳}{۲۷} - \frac{ا ب}{۶}\right) + \frac{ب^۲}{۲۷}\left(ب - \frac{ا^۲}{۴}\right)$$

(۱۷۴) بعض معادلات مکعبی جسمین اشکال کی خاص قیمتین ہون بغیر کارڈن کی ترکیب کے بھی حل ہوجاتی ہین مثلاً فرض کرو کہ

$$لا^۳ + ۳ لا = ا^۳ - ا^{-۳}$$

اسکو اسطرح لکھہ سکتی ہین کہ

$$لا^۳ + ۳ لا = \left(ا - \frac{۱}{ا}\right)^۳ + ۳\left(ا - \frac{۱}{ا}\right)$$

یعنی $لا^۳ - (ا - \frac{۱}{ا})^۳ + ۳ \left[لا - (ا - \frac{۱}{ا}) \right] = ۰$

اسمین ظاہر ہی کہ ایک قیمت $لا = ا - \frac{۱}{ا}$

اب پھر فرض کرو یہہ مکعبی مساوات کامل ہے کہ

$$لا^۳ + ا لا^۲ + ب لا + س = ۰$$

اور مثال کی درمیان یہہ ارتباط ۳ ا س = $ب^۲$ ہی تو مساوات مفروضہ اسطرح لکھی جائینگی

$$- لا^۳ = ا لا^۲ + ب لا + س$$

اسیواسطے $- ۳ ا ب لا^۳ = ۳ ب ا^۲ لا^۲ + ۳ ب^۲ ا لا + ب^۳$

اسیواسطے $(ا^۳ - ۳ ا ب) لا^۳ = ا^۳ لا^۳ + ۳ ب ا^۲ لا^۲ + ۳ ب^۲ ا لا + ب^۳ = (ا لا + ب)^۳$

اسیواسطے $لا \sqrt[۳]{ا^۳ - ۳ ا ب} = ا لا + ب$

اسیواسطے $لا = \frac{ب}{\sqrt[۳]{ا^۳ - ۳ ا ب} - ا}$

(۱۷۵) علم مثلث مستوی کی ۷ ا باب مین ایک عمل لکھا ہی جسی کہ ہم مساوات درجہ سوم معدوم التحویل کے قیمتین بذریعہ جداول علم مثلثی کی دریافت کرسکتی ہین یہہ بات عملاً تو کسی کام کی نہیں ہے لیکن ہم یہہ بتلائینگی کہ علم مثلثی جدولین کسطرح اون مثالوں کی حل کرنی مین بہی کام اتی ہین جو صورت معدوم التحلیل سی متعلق نہین ہین

فرض کرو کہ $لا^۳ + ق لا + ر = ۰$ لو

$$لا = \left(- \frac{ر}{۲} + \sqrt{\frac{ر^۲}{۴} + \frac{ق^۳}{۲۷}}\right)^{\frac{۱}{۳}} + \left(- \frac{ر}{۲} - \sqrt{\frac{ر^۲}{۴} + \frac{ق^۳}{۲۷}}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

اگر ق مثبت ہی تو فرض کرو کہ $\frac{ق^۳}{۲۷} = \frac{ر^۲}{۴}$ مس^۲ بر تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$لا = \left(- \frac{ر}{۲} + \frac{ر}{۲} \text{ قط بر}\right)^{\frac{۱}{۳}} + \left(- \frac{ر}{۲} - \frac{ر}{۲} \text{ قط بر}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

$$= \left(- \text{ جم بر}\right)^{\frac{۱}{۳}} \left[\left(\text{جم } \frac{بر}{۲}\right)^{\frac{۲}{۳}} - \left(\text{جب } \frac{بر}{۲}\right)^{\frac{۲}{۳}} \right]$$

اگر ق منفی ہو اور ۴ ق^۳ تعداد اچھوٹا ۲۷ ر^۲ سی ہو تو فرض کرو $\frac{ق^۳}{۲۷} = - \frac{ر^۲}{۴}$ جب^۲ بر تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$لا = \left(- \frac{ر}{۲} + \frac{ر}{۲} \text{ جم بر}\right)^{\frac{۱}{۳}} + \left(- \frac{ر}{۲} - \frac{ر}{۲} \text{ جم بر}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

$$= (-ر)^{\frac{1}{3}} \left[(جم \tfrac{ج}{2})^{\frac{2}{3}} - (جب \tfrac{ج}{2})^{\frac{2}{3}} \right]$$

(۱۷۶) ایک مساوات عظیم تحقیقات ریاضیہ میں غیر الوقوع ہی اوسپر بحث کرتی ہیں گو وہ اس باب کے خاص مطلب سے متعلق نہیں ہے

ہم یہہ دعوی کرتی ہیں کہ مساوات ح (لا) = ۰ تمام اصلی قیمتیں ہونگیں اگر ح (لا)

(لا - ا) (لا - ب) (لا - س) - ا^2 (لا - ا) - ب^2 (لا - ب) - س^2 (لا - س) - ۲ ا ب س

کو تعبیر کری مساوات کو اسطرح لکھہ سکتی ہیں کہ

$$(لا - ا) \left[(لا - ب)(لا - س) - ا^2 \right] - \left[ب^2 (لا - ب) + س^2 (لا - س) + ۲ ا ب س \right] = ۰$$

فرض کرو کہ اس مساوات درجہ دوم

$$(لا - ب)(لا - س) - ا^2 = ۰$$

کی قیمتیں صہ اور ک ہیں اور صہ بہ نسبت ک کی کم ہی تو مساوات درجہ دوم کے حل کرنی سی یہہ معلوم ہوگا

صہ بڑا ب یا س سی ہی اور ک چھوٹا ب یا س سی ہی متواتر لا کی جگہ ح (لا) میں + ∞ و صہ و ک و - ∞ رکھو تو یہہ نتایج جداگانہ حاصل ہونگے

$$+ \infty \text{ و } - \left[ب^2 (صہ - ب) + س^2 (صہ - س) \right] \text{ و } \left[ب^2 (ب - ک) + س^2 (س - ک) \right] \text{ و } - \infty$$

پس مساوات ح (لا) = ۰ کی تین اصلی قیمتیں ایک بڑی بہ نسبت صہ کی اور ایک درمیان صہ اور ک کی اور ایک چھوٹی بہ نسبت ک کے حاصل ہونگیں

(۱۷۷) اب دو صورتیں ایسی باقی ہیں کہ انکی توضیح اور تشریح زیادہ کرنی چاہی اور انکا حل اس اثبات سی نہیں ہوتا (۱) جس صورت میں صہ = ک (۲) جسمیں صہ اور ک ایک قیمت کعبی مساوات کے ہو

فرض کرو کہ صہ = ک چونکہ قیمتیں مساوات درجہ دوم کی برابر ہیں اسلئی یہہ شرط ضرور ہوگی کہ

(ب - س)^2 + ۴ ا^2 = ۰ اسکے واسطے ب = س اور ا = ۰ اسی معلوم ہوتا ہے کہ س ایک قیمت کعبی مساوات کی ہوگا اور ح (لا) کو لا - س پورا تقسیم کریگا اور مساوات کو برابر صفر کے لکھنے سے مساوات درجہ دوم کی حاصل ہوگی جسکی اصلی قیمتیں ہیں

(۲) فرض کرو کہ ھ اور ک مین سی ایک مثلاً ھ قیمت مکعبی مساوات کی ہی تو دفعہ ۱۷۶ کی موافق عمل کرنی سی ثابت ہوتا ہی کہ مکعبی مساوات کی یہی ایک اصلی قیمت چھوٹی ک سی ہے پس اوسکی دو اصلی قیمتین ہین ناگزیر تیسری قیمت بہی اصلی ہوگی اور اسیطرح اگر ک ایک قیمت مکعبی مساوات کی ہو تو ایک اصلی قیمت اوسکی بڑی بہ نسبت ھ کی ہوگی اسلئی ضروری کہ تیسری قیمت بہی اصلی ہو

(۱۷۸) اب ہم اوس شرط کی تحقیقات کرتی ہین جسکی موافق ھ یا ک ایک قیمت مساوات مکعبی کے ہو

فرض کرو کہ لر ایک قیمت مساوات درجہ دوم اور درجہ سوم کی بہی ہے

چونکہ لر مساوات درجہ دوم کی ایک قیمت ہے اسلئی

$$(لر-ب)(لر-س)-اً^2=0 \qquad (1)$$

اور چونکہ لر مساوات مکعبی کی بہی قیمت فرض کی گئی ہی اسلئی یہہ حاصل ہوگا کہ

$$بً^2(لر-ب)+سً^2(لر-س)+2اً بً سً=0 \qquad (2)$$

(۱) اور (۲) سے یہہ مستنبط ہوتا ہے کہ

$$بً^2(لر-ب)+سً^2(لر-س)+2بً سً\sqrt{(لر-ب)(لر-س)}=0$$

یعنی $\left[بً\sqrt{(لر-ب)}+سً\sqrt{(لر-س)}\right]^2=0$

اسیواسطی $بً^2(لر-ب)=سً^2(لر-س) \qquad (3)$

(۲) اور (۳) سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$لر-ب=-\frac{اً سً}{بً} \text{ اور } لر-س=-\frac{اً بً}{سً} \qquad (4)$$

اور اسیواسطے $ب-\frac{اً سً}{بً}=س-\frac{اً بً}{سً} \qquad (5)$

اسی ثابت ہوا کہ مکعبی مساوات کی مثال مین ارتباط (۵) ہونا چاہی تاکہ مساوات درجہ دوم کی قیمتوں مین سی ایک قیمت مکعبی مساوات کی ایک قیمت ہو بالعکس اسکی اگر (۵) مستحکم ہو تو (۴) سی تحقیق کرکے لر کے واسطی ایک قیمت مقرر کرین تو دونو مساوات (۱) اور (۲) کی شرائط پوری ہوجائینگی پس مساوات درجہ دوم اور مساوات درجہ سوم کے

ایک قیمت مشترک ہوجائیگی

(۱۷۹) مساوات مکعبی کی قیمتون کی برابر ہونی کی شرائط ہم تحقیق کرتے ہین اگر ھ اور ک مین سی کوئی ایک ہی قیمت مکعبی مساوات کی نہ ہو تو دفعہ ۱۷۶ اکی اثبات سے معلوم ہوتا ہے کہ مساوات مکعبی کی قیمتین غیر مساوی ہین دفعہ ۱۷۶ کا عمل ان دوم درجہ کی مساواتون مین سے ہر ایک پر

$$(لا - س)(لا - ا) - بَ^۲ = ۰ یا (لا - ا)(لا - ب) - سَ^۲ = ۰$$

بجای مساوات درجہ دوم $(لا - ب)(لا - س) = اَ^۲ = ۰$ کے چل سکتا ہے

اسی ثابت ہوتا ہی کہ مکعبی مساوات کی برابر قیمتین نہین ہوسکتین جب تک مکعبی اور ان درجہ دوم کی مساواتون مین سی ایک مساوات کی قیمت مشترک نہ ہو

اسی ثابت ہوا کہ مساوات (۵) سی شرائط لابدی مساوات مکعبی کی برابر قیمتون کے واسطی یہہ حاصل ہونگین

$$ا - \frac{بَ سَ}{اَ} = ب - \frac{سَ اَ}{بَ} = س - \frac{اَ بَ}{سَ}$$

بالعکس اسکی اگر یہہ شرائط مستحکم ہون تو مساوات مکعبی کی قیمتین برابر ہونگین دلیل اسکی یہہ ہے کہ ان برابر مقادیر کو ر سے تعبیر کرو

$$تو\ ا = ر + \frac{بَ سَ}{اَ}\ اور\ ب = ر + \frac{سَ اَ}{بَ}\ اور\ س = ر + \frac{اَ بَ}{سَ}$$

ا اور ب اور س کی جگہ ان قیمتون کو مکعبی مساوات مین مندرج کرو تو

$$(لا - ر)^۳ - (لا - ر)^۲ \left(\frac{بَ سَ}{اَ} + \frac{سَ اَ}{بَ} + \frac{اَ بَ}{سَ}\right) = ۰$$

پس قیمت ر مکرر آتی ہے اور اور قیمت یہہ ہے کہ

$$ر + \frac{بَ سَ}{اَ} + \frac{سَ اَ}{بَ} + \frac{اَ بَ}{سَ}$$

تیرہوان باب معادلات درجہ چہارم

(۱۸۰) معادلات درجہ چہارم کی حل کرنی کی بعض ترکیبین ہم بیان کرتے ہین اوس دلیل کی موافق کہ دفعہ ۱۶۵ امین بیان ہوئی ہم مساوات درجہ چہارم کو بغیر دوسرے رقم کی فرض کرتی ہین اول حل جسکا ہم بیان کرینگے دس کارٹیس کا حل کہلاتا ہے

(۱۸۱) مساوات $لا^4 + ق لا^2 + ر لا + ص = ۰$ کو حل کرو

فرض کرو $لا^4 + ق لا^2 + ر لا + ص = (لا^2 + ھ لا + ف) (لا^2 - ھ لا + گ)$

اب ہم کو اس بات بتلانا چاہئی کہ مقادیر ھ ف گ کو کس طرح دریافت کر سکتی ہین بائیں طرف جو اجزاء ضربی لکھی ہین اونکو باہم ضرب دو اور دونو ارکان کی امثال لا کے یکسان قوتون کے اسمین برابر لکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$گ + ف - ھ^2 = ق$ اور $ھ (گ - ف) = ر$ اور $گ ف = ص$

یعنی $گ + ف = ق + ھ^2$ اور $گ - ف = \frac{ر}{ھ}$ اور $گ ف = ص$

ان مساواتون مین سی اول اور دوم مساوات سی گ اور ف کو ھ کی ارقام مین دریافت کر کے تیسرے مساوات مین مشرح کرو تو

$(ق + ھ^2 + \frac{ر}{ھ}) (ق + ھ^2 - \frac{ر}{ھ}) = ۴ ص$

تحویل اور اختصار کرنی سی اس مساوات سی یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$ھ^6 + ۲ ق ھ^4 + (ق^2 - ۴ ص) ھ^2 - ر^2 = ۰$

اس مساوات کو $ھ^2$ دریافت کرنی کی واسطی ہم مساوات مکعبی سمجہہ سکتی ہین اور ہم کو یقینی ایک حقیقی مثبت قیمت بموجب دفعہ ۲۰ کی حاصل ہوگی پس جب $ھ^2$ ہم کو معلوم ہوگیا تو اوسی ھ معلوم ہوگا اور پھر گ اور ف معلوم ہو جائنگے پس جملہ $لا^4 + ق لا^2 + ر لا + ص$ دو حقیقی اجزاء ضربی مین تحلیل ہو جائیگا اور ہم کو مساوات درجہ چہارم کی چارون قیمتین ان درجہ دوم کی مساواتون کی حل کرنی سی حاصل ہو جائینگی

$لا^2 + ھ لا + گ = ۰$ اور $لا^2 - ھ لا + گ = ۰$

(۱۸۲) یہہ بات غور طلب ہی کہ ہم نی دو اجزاء ضربی جو درجہ دوم کی فرض کی ہین ان مین سی ایک مین رقم ھ لا فرض کی ہی اور دوسرے مین - ھ لا اور دلیل اسکی یہہ ہی کہ جس جملہ کی ہم تحلیل اجزاء ضربی درجہ دوم مین کرنا چاہتی ہین اوسمین رقم $لا^3$ کی ملتف نہین ہی اب دوسری مساوات درجہ دوم کی جو آخر مین دفعہ بالا کی لکھی ہی اوسکی دونو قیمتون کا مجموعہ ھ ہی اصلی مساوات

درجہ چہارم مفروضہ کی دو قیمتوں کا مجموعہ صہ ہی اور مساوات درجہ چہارم کی چار قیمتوں مین سی دو دو کو $\frac{4 \times 3}{2 \times 1}$ طرح سی یعنی ۶ طرح سی منتخب کر سکتی ہین اور اسی دلیل سی مساوات صہ کی چھہ درجہ کی حاصل ہوتی ہی لیکن اس سبب سی کہ موافق دفعہ ۴۵ کے مساوات درجہ چہارم کی چارون قیمتون کا مجموعہ صفر ہی اسلئی مجموعہ دو قیمتون کا متحد المقدار اور مختلف العلامت باقی دو مقدارون کے مجموعہ کا ہوگا پس اسی دلیل اس بات کی معلوم ہوئی کہ مساوات صہ کی جفت قوای اسطرح ملتف ہوتی ہین کہ صہ^2 کی قیمتین مکعبی مساوات کی حل کرنی سی دریافت ہوجاتی ہین جب صہ^2 ہم کو دریافت ہوجاوے تو ہم کو اوسکی جذر نکالنی سی جو دو قیمتین مختلف العلامت دریافت ہونگین اونمین سی ہر ایک کو کام مین لاسکتی ہین اسواسطی کہ صہ کی مختلف علامتون کی کام مین لانی سی قیمتین ف اور گہ کی فقط باہمین بدل جائینگے اور اس تبدل سی اثر اون نتایج پر کچہہ نہین ہوگا جو مساوات درجہ چہارم کے حل کرنے مین کام اتے ہین

(۱۸۳) مثلاً فرض کرو کہ $لا^4 - ۱۰ لا^2 - ۲۰ لا - ۱۶ = ۰$ یہان ق = - ۱۰ اور ر = - ۲۰ اور ص = - ۱۶ مساوات مکعبی صہ^2 کی یہہ حاصل ہوگی کہ $صہ^6 - ۲۰ صہ^4 + ۱۶۴ صہ^2 - ۴۰۰ = ۰$ اور ایک قیمت اسکی صہ^2 = ۴ ہی دفعہ ۱۱۹ دیکھو پس صہ = ۲ تو ف = ۲ اور گہ = - ۸ اسواسطے

$$لا^4 - ۱۰ لا^2 - ۲۰ لا - ۱۶ = (لا^2 + ۲ لا + ۲)(لا^2 - ۲ لا - ۸)$$

پس مساوات مفروضہ درجہ چہارم کی یہہ چار قیمتین دریافت ہونگین

۴ و - ۲ و $-۱ + \sqrt{-۱}$ اور $-۱ - \sqrt{-۱}$

(۱۸۴) پس اوپر کی بیان سی ظاہر ہوتا ہی کہ مساوات درجہ چہارم کا حل موقوف ایک مساوات مکعبی کے استعانت پر موقوف ہی اسواسطی اس امر کا دریافت کرنا ایک بڑی بات ٹھہری کہ یہہ مکعبی مساوات کب صورت معدوم التحویل رکھتی ہی دفعہ ۱۷۱ دیکھو

اس سے موقع اس دعوی کی ثابت کرنی کا ہاتہہ لگتا ہی کہ اگر مساوات درجہ چہارم کی دو حقیقی قیمتین اور دو خیالی قیمتین ہون تو مساوات مکعبی مستعان کی کبھی صورت معدوم التحویل نہین واقع ہوگی

دلیل فرض کرو کہ مساوات درجہ چہارم کی خیالی قیمتیں سہ + صہ $\sqrt{-1}$ اور سہ − صہ $\sqrt{-1}$ کی تعبیر ہوں تو اس سبب سے کہ چاروں قیمتوں کا مجموعہ صفر ہی تو حقیقی قیمتیں − سہ + لر اور − سہ − لر کی ہونگیں ان قیمتوں میں سے ہر زوج کے مجموعہ سے یہہ جملے حاصل ہونگے کہ

± ۲ سہ و ± (لر ± صہ $\sqrt{-1}$) اور ± (لر − صہ $\sqrt{-1}$)

پس تین قیمتیں ھہ^2 کی یہہ ہونگیں (۲ سہ)^2 اور (لر + صہ $\sqrt{-1}$)^2 اور (لر − صہ $\sqrt{-1}$)^2 اگر لر صفر نہ ہو تو ھہ^2 کے ان قیمتوں میں سے دو خیالی ہونگیں اور اگر لر صفر ہو تو ھہ^2 کی تمام قیمتیں حقیقی ہونگیں لیکن اونمیں سے دو برابر ہیں اسلئے مکعبی مساوات ھہ^2 کی صورت معدوم التحویل نہیں ہوگی

(۱۸۵) اگر مساوات درجہ چہارم کی تمام حقیقی قیمتیں ہوں تو مساوات مکعبی مستعان کی قیمتیں بھی تمام حقیقی ہونگیں اور اگر مساوات درجہ چہارم کی تمام خیالی قیمتیں ہوں تو وہ ان

سہ ± صہ $\sqrt{-1}$ اور − سہ ± لر $\sqrt{-1}$ کی ہونگیں ان قیمتوں میں سے ہر زوج کے مجموعہ سے یہہ جملے حاصل ہونگے کہ ± ۲ سہ و ± (صہ + لر) $\sqrt{-1}$ اور ± (صہ − لر) $\sqrt{-1}$

پس قیمتیں ھہ^2 کی ۴ سہ^2 اور − (صہ + لر)^2 اور − (صہ − لر)^2 ہیں اسلئے سب حقیقی قیمتیں ہیں اسے معلوم ہوا کہ اگر مساوات درجہ چہارم کی تمام حقیقی قیمتیں ہوں یا خیالی قیمتیں ہوں تو مکعبی مساوات مستعان اکثر معدوم التحویل ہوگی ہم نے جو یہہ لکھا ہے کہ مساوات اکثر معدوم التحویل ہوگی تو اسکا سبب یہہ ہے کہ ممکن ہے کہ مساوات مکعبی کی دو قیمتیں برابر ہوں تو پھر اوس وقت وہ معدوم التحویل نہیں ہوگے

(۱۸۶) ہم نے اوپر کی دو دفعوں میں یہہ بتلایا ہے کہ مساوات مکعبی مستعان کی قیمتوں کے صورتیں موافق مساوات مفروضہ درجہ چہارم کی قیمتوں کے کیا ہونگیں اب ہم اوسکی بالعکس لکھتے ہیں کہ مساوات مفروضہ درجہ چہارم کی قیمتوں کی صورتیں موافق مساوات مکعبی مستعان کے قیمتوں کے کیا ہونگیں چونکہ مساوات مکعبی کی آخر رقم منفی ہے اسلئے ایک قیمت مثبت ہوگی اور چونکہ بموجب دفعہ ۱۸۵ کے حاصل ضرب قیمتوں کا مثبت ہے تو یہہ صورتیں واقع ہونگیں (۱) تمام قیمتیں مثبت ہوں (۲) ایک مثبت

ہو اور دو منفی ہوں (۳) ایک مثبت قیمت اور دو خیالی قیمتیں تو موجب دفعات ۱۸۴ اور ۱۸۵ کے نتایج مفصلہ ذیل حاصل ہونگے

(۱) اگر مساوات مکعبی کی تمام قیمتیں مثبت ہوں تو مساوات درجہ دوم کی تمام قیمتیں حقیقی ہونگیں

(۲) اگر مساوات مکعبی کی ایک مثبت قیمت ہو اور دو منفی قیمتیں تو مساوات درجہ چہارم کے دو قیمتیں حقیقی اور دو قیمتیں خیالی ہونگیں یا چاروں قیمتیں خیالی ہونگیں

(۳) اگر مکعبی مساوات کی ایک مثبت قیمت ہو اور دو خیالی قیمتیں تو مساوات درجہ چہارم کی دو حقیقی قیمتیں اور دو خیالی قیمتیں ہونگیں

(۱۸۷) مساوات درجہ چہارم کی چاروں قیمتیں بہت سادگی کے ساتھ مکعبی مساوات استعانت کی قیمتوں میں بیان ہو سکتی ہیں

فرض کرو کہ ھ کی تین قیمتیں $س^2$ اور $ص^2$ اور $ل^2$ سے تعبیر ہوں جو اس مساوات سے حاصل ہوتی ہیں کہ

$$ھ^3 + ۲ ق ھ^2 + (ق^2 - ۴ ص) ھ - ر^2 = ۰$$

تو بموجب دفعہ ۴۵ کے یہہ حاصل ہوتا ہی کہ $ر^2 = س^2 ص^2 ل^2$ اور

$- ۲ ق = س^2 + ص^2 + ل^2$ پس $ر = س ص ل$ کر کے رکھیں اور ھ کی قیمت س لیں تو

$$لا^2 + ھ لا + ف = لا^2 + س لا + \frac{1}{2} \left(ق + س^2 - \frac{ر}{س}\right)$$

$$= لا^2 + س لا + \frac{1}{2} (س^2 - ص^2 - ل^2 - ۲ ص ل)$$

اسی واسطے مساوات $لا^2 + ھ لا + ف = ۰$ کے حل کرنے سے ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$لا = \frac{1}{2} (- س - ص - ل) \text{ یا } لا = \frac{1}{2} (- س + ص + ل)$$

اور اسی طرح مساوات $لا^2 - ھ + ف = ۰$ کے حل کرنے سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

$$لا = \frac{1}{2} (س - ص + ل) \text{ یا } لا = \frac{1}{2} (س + ص - ل)$$

پس مساوات درجہ چہارم کی یہہ چار قیمتیں حاصل ہونگیں کہ

$$\frac{1}{2} (- س - ص - ل) \text{ و } \frac{1}{2} (- س + ص + ل) \text{ و } \frac{1}{2} (س - ص + ل) \text{ و } \frac{1}{2} (س + ص - ل)$$

(۱۸۸) ایک اور ترکیب مساوات درجہ چہارم کی حل کرنے کی مختلف مہندسین نے لکھی ہی اونمیں کچھہ تھوڑا ہی فرق ہے

اور اس ترکیب کا نام کبھی تو فریری کی ترکیب کبھی وارنگ کی ترکیب اور کبھی سمپسن کی ترکیب کہا جاتا ہے اب ہم اوسکو بیان کرتے ہین

فرض کرو مساوات درجہ چہارم کی یہہ ہو کہ

$$\text{لا}^{4} + \text{ع}\,\text{لا}^{3} + \text{ق}\,\text{لا}^{2} + \text{ر}\,\text{لا} + \text{ص} = ۰$$

طرفین پر ا لا^۲ + ب لا + س زیادہ کرو اور ا اور ب اور س کو ایسا معین کرو کہ ہر ایک طرف مساوات کی مربع کامل بنجاوی تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{لا}^{4} + \text{ع}\,\text{لا}^{3} + (\text{ق} + \text{ا})\,\text{لا}^{2} + (\text{ر} + \text{ب})\,\text{لا} + \text{ص} + \text{س} = \text{ا}\,\text{لا}^{2} + \text{ب}\,\text{لا} + \text{س}$$

بائین طرف کا رکن مساوات مجذور کامل ہوگا اگر $\text{ب}^{2} = ۴\,\text{ا}\,\text{س}$ کے ہو دائین طرف کی رکن کو فرض کرو کہ وہ برابر

$$\left(\text{لا}^{2} + \frac{\text{ع}\,\text{لا}}{۲} + \text{م}\right)^{2}$$

کے ہو تو امثال کے مقابلہ کرنے سے یہہ حاصل ہوگا کہ

$$۲\text{م} + \frac{\text{ع}^{2}}{۴} = \text{ق} + \text{ا} \quad \text{اور} \quad \text{ع}\,\text{م} = \text{ر} + \text{ب} \quad \text{اور} \quad \text{م}^{2} = \text{ص} + \text{س}$$

یہہ تین ارتباط ا اور ب اور س کو ارقام م مین بیان کرتی ہین ا اور ب اور س کی قیمتون کو مساوات $\text{ب}^{2} = ۴\,\text{ا}\,\text{س}$ مین مندرج کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$(\text{ع}\,\text{م} - \text{ر})^{2} = ۴\left(۲\text{م} + \frac{\text{ع}^{2}}{۴} - \text{ق}\right)(\text{م}^{2} - \text{ص})$$

اس مکعبی مساوات سی م دریافت ہوگا اور پہر اوسسے ا اور ب اور س معلوم ہونگی اور چونکہ یہہ ہم کو حاصل ہی کہ

$$\left(\text{لا}^{2} + \frac{\text{ع}\,\text{لا}}{۲} + \text{م}\right)^{2} = \text{ا}\,\text{لا}^{2} + \text{ب}\,\text{لا} + \text{س} = \text{ا}\,\text{لا}^{2} + \text{ب}\,\text{لا} + \frac{\text{ب}^{2}}{۴\text{ا}}$$

اسی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ $\text{لا}^{2} + \frac{\text{ع}\,\text{لا}}{۲} + \text{م} = \pm \frac{۲\,\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}}{۲\sqrt{\text{ا}}}$

پس ہم کو دو مساواتین درجہ دوم کی حل کرنی پڑینگے یعنی

$$\text{لا}^{2} + \frac{\text{ع}\,\text{لا}}{۲} + \text{م} + \frac{۲\,\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}}{۲\sqrt{\text{ا}}} = ۰ \quad \text{اور} \quad \text{لا}^{2} + \frac{\text{ع}\,\text{لا}}{۲} + \text{م} - \frac{۲\,\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}}{۲\sqrt{\text{ا}}} = ۰$$

(۱۸۹) یہان یہہ ثابت ہو سکتا ہی کہ اس ترکیب مین جس مکعبی مساوات متعاون کی حل کرنی کا

کام ہم کو پڑتا ہی وہ اکثر معدوم التحویل ہوگی بشرطیکہ مساوات درجہ چہارم کی دو حقیقی قیمتیں اور دو خیالی قیمتیں نہ ہوں **دلیل** فرض کرو کہ مساوات مفروضہ درجہ چہارم کی چار قیمتوں کو سہ وصہ ولر و فر تعبیر کرتی ہیں تو دفعہ ۱۸۸ میں دو مساواتیں درجہ دوم کی حاصل ہوئیں ہیں اون پر خیال کرنی سی یہہ نتیجہ پیدا ہوتا ہی کہ م + ب/۲ا برابر چاروں مقادیر سہ وصہ ولر و فر مین سی دو کی حاصل ضرب کے ہو اور م - ب/۲ا باقی دو کے حاصل ضرب کے ہو پس فرض کرو کہ

م + ب/۲ا = سہ صہ اور م - ب/۲ا = لرفر

پس م = ½ (سہ صہ + لرفر)

پس یہاں قرینہ سی یہہ نتیجہ مستنبط کرتی ہیں کہ م کی دو اور قیمتیں ½ (سہ لر + صہ فر) اور ½ (سہ فر + صہ لر) ہونگیں

یہہ ظاہر ہی کہ اگر سہ وصہ ولر و فر تمام حقیقی قیمتیں ہوں تو م کی یہہ تینوں قیمتیں حقیقی ہونگیں اور اگر تمام سہ وصہ ولر و فر تمام خیالی ہوں تو بھی تینوں قیمتیں حقیقی ہونگیں لیکن اگر چاروں قیمتوں مین سی دو خیالی اور دو حقیقی قیمتیں ہوں تو یہہ نتیجہ نکلی گا کہ م کی دو قیمتیں خیالی ہیں اور ایک حقیقی یا اونکی تمام حقیقی قیمتیں ہیں اور دو اونمیں سی برابر ہیں

(۱۹۰) اب ہم یولر کی ترکیب مساوات درجہ چہارم کی حل کرنی کی لکھتی ہیں فرض کرو کہ مساوات یہہ ہے

لا۴ + ق لا۲ + ر لا + ص = ۰

فرض کرو کہ لا = د + ی + ھ پس

لا۲ = د۲ + ی۲ + ھ۲ + ۲ (د ی + ی ھ + ھ د)

یعنی لا۲ - د۲ - ی۲ - ھ۲ = ۲ (د ی + ی ھ + ھ د)

طرفین کا مجذور کرو تو

لا۴ - ۲ لا۲ (د۲ + ی۲ + ھ۲) + (د۲ + ی۲ + ھ۲)۲ = ۴ (د ی + ی ھ + ھ د)۲

= ۴ (د۲ ی۲ + ی۲ ھ۲ + ھ۲ د۲) + ۸ د ی ھ (د + ی + ھ)

د + ی + ھ کی جگہ لا کو رکہو اور منتقل کرو تو

$$لا^4 - ۲ لا^2 (د^2 + ی^2 + ھ^2) - ۸ لا د ی ھ + (د^2 + ی^2 + ھ^2)^2 - ۴ (د^2 ی^2 + ی^2 ھ^2 + ھ^2 د^2) = ۰$$

تاکہ اس مساوات کی مساوات مفروضہ درجہ چہارم کی ساتہہ تطبیق ہو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ق = -۲ (د^2 + ی^2 + ھ^2) \text{ اور } ر = -۸ د ی ھ$$

$$ص = (د^2 + ی^2 + ھ^2)^2 - ۴ (د^2 ی^2 + ی^2 ھ^2 + ھ^2 د^2)$$

$$\text{پس } د^2 + ی^2 + ھ^2 = -\frac{ق}{۲}$$

$$د^2 ی^2 + ی^2 ھ^2 + ھ^2 د^2 = \frac{۱}{۴} \left(\frac{ق^2}{۴} - ص\right) = \frac{ق^2 - ۴ ص}{۱۶}$$

$$د^2 ی^2 ھ^2 = \frac{ر^2}{۶۴}$$

اسیواسطے موافق دفعہ ۴۵ کی د² + ی² اور ھ² قیمتین ط کی ہین جو اس مکعبی مساوات سے حاصل ہوتے ہین کہ

$$ط^3 + \frac{ق}{۲} ط^2 + \frac{ق^2 - ۴ ص}{۱۶} ط - \frac{ر^2}{۶۴} = ۰$$

فرض کرو کہ اس مساوات کی قیمتین $ط_1$ اور $ط_2$ اور $ط_3$ سی تعبیر ہوتی ہین تو

$$د = \pm \sqrt{ط_1} \text{ اور } ی = \pm \sqrt{ط_2} \text{ اور } ھ = \pm \sqrt{ط_3}$$

اگر ان قیمتون کو جملہ لا یعنی د + ی + ھ مین مندرج کرین تو اٹہہ مختلف نتیجی بسبب اشتباہ علامت کے پیدا ہونگی لیکن یہہ سب نتایج داخل ہونی کی قابل نہین ہین اسواسطی کہ ہم کو یہہ ہی حاصل ہوا تہا کہ د ی ھ = $-\frac{ر}{۸}$ پس د اور ی اور ھ کی حاصل ضرب کے علامت متضاد علامت ر کی ہو اگر ہم فرض کرین کہ ر مثبت تو لا کی وہ قیمتین جو مساوات مین داخل ہونی کی قابلیت رکہتی ہین یہہ ہین نکلین

$$\sqrt{ط_1} + \sqrt{ط_2} - \sqrt{ط_3} \text{ و } \sqrt{ط_1} - \sqrt{ط_2} + \sqrt{ط_3} \text{ و } -\sqrt{ط_1} + \sqrt{ط_2} + \sqrt{ط_3} \text{ اور } -\sqrt{ط_1} - \sqrt{ط_2} - \sqrt{ط_3}$$

اگر ہم ر کو منفی فرض کرین تو لا کی یہہ قیمتین مساوات مین داخل ہونی کی قابلیت رکہنی والی حاصل ہونگی

$$\sqrt{ط_1} + \sqrt{ط_2} + \sqrt{ط_3} \text{ و } \sqrt{ط_1} - \sqrt{ط_2} - \sqrt{ط_3} \text{ و } -\sqrt{ط_1} + \sqrt{ط_2} - \sqrt{ط_3} \text{ و } -\sqrt{ط_1} - \sqrt{ط_2} + \sqrt{ط_3}$$

(۱۵۱) دلیل اس بات کی کہ کیون اٹہہ قیمتین لا کی دفعہ گذشتہ مین پیدا ہوتی ہین یہہ ہی کہ ارتباط

ی ی ھ = − ... کا مجذور کیا گیا تہا اور وہ عمل مین اس صورت ی ی ھ۲ = ... مین کام آیا تہا پس اس سبب سے کہ ارتباط دوسرے صورت مین علامت ر کی تبدل سی نہین بدلتا تو عمل مین فی الحقیقت قیمتین مساوات درجہ چہارم لا۴ + ق لا۲ − رلا + ص = ۰ اور نیز مساوات درجہ چہارم لا۴ + ق لا۲ + رلا + ص = ۰ کی کام مین ائی ہین اسلی چار کی اٹھہ قیمتین ہوجاتی ہین دفعہ ۱۸۱ اکی مکعبی مساوات مستعان دفعہ ۱۹۰ اکی مکعبی مساوات سی تطبیق ہوجائیگی اگر ھ۲ = ۴ط کے فرض کرین پس دفعات ۱۸۴ − ۱۸۶ تک مین جو مساوات مکعبی مستعان اور مساوات مفروضہ درجہ چہارم کے قیمتون کے ارتباط اور وہ صورتین جو مساوات کو معدوم التحویل بناتی ہین لکہی ہین وہ جیسی کہ ڈس کاٹریس کی ترکیب سے متعلق ہین ایسی ہی یولر کی ترکیب سی بہی متعلق ہین

(۱۹۲) حل خاص صورت کی مساوات درجہ چہارم کا بہ نسبت عام صورت مساوات درجہ چہارم کے بہت آسان ہوتا ہے مثلاً یہہ مساوات درجہ چہارم

لا۴ + ع لا۳ + ق لا۲ + رلا + ص = ۰

مساوات درجہ دوم کی طرح حل ہوسکتی ہی اگر ع۳ − ۴ ع ق + ۸ ر = ۰ کے اسواسطی کہ مساوات لا۴ + ع لا۳ + ق لا۲ + رلا + ص = ۰ کو اسطرح لکہہ سکتی ہین کہ

لا۲ (لا + ع/۲)۲ + (ق − ع۲/۴) لا (لا + ر/(ق − ع۲/۴)) + ص = ۰

اور یہہ مساوات درجہ دوم کی طرح حل ہوسکتی ہی اگر ر/(ق − ع۲/۴) = ع/۲ کے ہو یعنی اگر ع۳ − ۴ ع ق + ۸ ر = ۰

چودہوان باب سٹرم صاحب کا ضابطہ

(۱۹۳) ابواب گذشتہ مین ہم نی معادلات کی قیمتون کی مسائل اور تیسری اور چوتہی درجہ کی مساواتون کی حل کرنی کی ترکیبین لکہین ہین مگر اب ہم ایک اور ہی مضمون لکہتی ہین یعنی معادلات کی عددی تقریبی قیمتین کن ترکیبون اور حکمتون سی دریافت ہوتی ہین آغاز اس مضمون کا سٹرم صاحب کی ضابطہ سی ہوتا ہی اول اس ضابطہ کو ثابت کرتے ہین اوسکا مطلب یہہ ہے

کہ ایک مساوات کی قیمتوں کا مقام اور تعداد حقیقی قیمتوں کی تشخیص ہوجائے
دفعہ آئندہ میں اس ضابطہ کو ثابت کیا ہے اور پھر کچھ کیفیتیں اس ضابطہ کی لکھی ہیں اور بعد ازاں اسکے موافق مثالوں کو حل کیا ہے

(۱۹۴) **سٹرم صاحب کا ضابطہ** فرض کرو کہ ح (لا) = مساوات ہو جسمیں مساوی قیمتیں خارج ہوگئی ہیں اور ح (لا) کا اول جملہ مشتقہ ح۱ (لا) ہو اور پھر ح (لا) اور ح۱ (لا) پر عمل وفق اعظم دریافت کرنے کا کیا گیا ہو مگر اوسمیں تھوڑی ترمیم اور کی گئی ہو کہ جو باقی تقسیم کی اندر پیدا ہوا اوسکی علامتیں بدل دی گئیں ہوں اور پھر وہ باقی مقسوم علیہ بنائی گئی ہو اور یہہ عمل جب تک جاری رہا ہو کہ ایک باقی ایسی حاصل ہو کہ اوسکو کچھ لگاؤ لا سے نہ ہو اور اس باقی کی بھی علامتیں بدل گئی ہوں

فرض کرو کہ اسطرح جو باقیات ترمیم شدہ حاصل ہوں وہ اس سلسلہ ح۲ (لا) و ح۳ (لا) ... حم (لا) سے تعبیر ہوں فرض کرو کہ سہ کوئی مقدار ہو اور صہ ایک اور مقدار ہو جو از روی جبر مقابلہ بڑی سہ سے ہو تو مساوات ح (لا) = ۰ کی حقیقی قیمتوں کی تعداد درمیان سہ اور صہ کی برابر اوس زیادتی کی ہوگی جو سلسلہ ح (لا) اور ح۱ (لا) اور ح۲ (لا) ... حم (لا) کی تغیرات علامت کی تعداد کو اوس حالت میں کہ لا = سہ کی ہو

اوس تعداد تغیرات علامت پر اس سلسلہ کی حاصل ہے کہ جب لا = صہ کے ہو

تمام سلسلہ ح (لا) و ح۱ (لا) و ح۲ (لا) ... حم (لا) کو سٹرم کے جملے کہتے ہیں اور سلسلہ ح۲ (لا) و ح۳ (لا) ... حم (لا) کو مستعان جملے کہتے ہیں مستعان جملے وہی ہیں جو سٹرم کے جملے ہیں مگر اونمیں سے ح (لا) خارج ہے

فرض کرو کہ ق۱ و ق۲ ... قم−۱ متواتر خارج قسمتوں کو جو عمل مذکور سے پیدا ہوتی ہیں تعبیر کرتے ہیں تو یہہ ارتباطات حاصل ہونگے

ح (لا) = ق۱ ح۱ (لا) − ح۲ (لا)

ح۱ (لا) = ق۲ ح۲ (لا) − ح۳ (لا)

ح۲ (لا) = ق۳ ح۳ (لا) − ح۴ (لا)

حم−۲ (لا) = قم−۱ حم−۱ (لا) − حم (لا)

اب ان ارتباطات سے تین نتیجے استخراج کرتے ہین

اول اخر جملہ ح م (لا) صفر نہین ہی اسواسطے کہ بموجب فرض کے اوسکو کچھہ تعلق لا سے نہین ہے اگر وہ صفر ہو تو ح (لا) اور ح ۱ (لا) کا چاہیے کوئی وفق مشترک ہو اور بموجب دفعہ ۷۵ کے مساوات ح (لا) =۰ کی برابر قیمتین ہونی چاہیے اور یہہ خلاف فرض کے ہے

دوم دو متصل کی جملی ستعان ایک ہی وقت مین معدوم نہین ہو سکتی اسواسطے کہ وہ معدوم ہون تو پہر اونکے اگی کی جملی بہی معدوم ہون حتےٰ کہ ح م (لا) بہی داخل ہو اور یہہ بموجب اول نتیجہ کی ناممکن ہے

سوم جب ایک جملہ معدوم ہوتا ہی تو اوسکی متصل کی طرفین جملون کی علامتین متضاد ہوتی ہین مثلاً فرض کرو ح ۲ (لا) =۰ تو نظم ارتباطات کی تیسری ارتباط سے ح ۱ (لا) = -ح ۳ (لا) حاصل ہوگا

اب کوئی سٹرم کی جملون مین کسی جملہ کی اندر علامت کا تبدل نہین ہو سکتا الا اوس صورت مین کہ لا کی نوبت اوس قیمت پر پہونچی کہ وہ اوس جملی کو معدوم کر دی اور اب ہم یہہ ثابت کرینگے کہ جب لا کی نوبت اوس قیمت پر پہونچتی ہی کہ وہ ح (لا) کو معدوم کر دی تو سٹرم کی جملون مین ایک تغیر علامت گم ہو جاتا ہے اور اس سبب سی کہ لا کی نوبت اوس قیمت پر پہونچی کہ وہ کسی ایک جملہ ستعان کو معدوم کر دے تو کوئی تغیر علامت نہ گم ہوتا ہے نہ پیدا ہوتا ہے

اول فرض کرو کہ س ایک قیمت مساوات ح (لا) =۰ کی ایسی ہو کہ ح (س) =۰

فرض کرو کہ صہ ایک مثبت مقدار ہو اب بموجب دفعہ ۱۰ کی ح (س -صہ) قوا صہ مین پہیل سکتا ہے اور بموجب دفعہ ۱۴ کی صہ ایسا چہوٹا مقرر ہو سکتا ہی کہ تمام سلسلہ کی وہی علامت ہو جو اول قسم کی علامت ہو جو معدوم نہین ہوتی یعنی علامت ح (س -صہ) کی وہی ہو جو علامت -صہ ح ۱ (س) کی ہے کیونکہ ح (س) =۰ اور علامت ح ۱ (س -صہ) کی وہی ہوگی جو علامت ح ۱ (س) کی ہے بشرطیکہ صہ کو کافی چہوٹا فرض کرین پس اگر لا = س -صہ کی ہو اور صہ کافی چہوٹا فرض کیا جاے تو ح (لا) اور ح ۱ (لا) کی مختلف علامتین ہونگین

اسیطرح سی ثابت ہو سکتا ہی کہ اگر لا = س + صہ کی اور صہ کافی چہوٹا فرض کیا جاے

تو ح (لا) اور ح ر(لا) کی ایک ہی علامت ہوگی

پس جب لا بڑھ کر مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت پر اپنی نوبت پہونچائی تو سٹرم کی جملون مین سے ایک تغیر علامت گم ہوجاتا ہے

دوم فرض کرو کہ س ایسی قیمت لا کی ہی کہ مستعان جملون مین سے ایک کو معدوم کرتا ہی مثلاً ح ر(لا) کو تو ح ر(س) = ۰ تو ح ر-۱ (س) اور ح ر+۱ (س) کی مختلف علامتین ہونگین اور ماقبل لا = س کی اور مابعد لا = س کی تین قیمتین ح ر-۱ (لا) اور ح (لا) و ح ر+۱ (لا) ایک مستقل علامت ہمیشہ رکہینگی اور اونمین ایک تغیر علامت ہوگا اسواسطے کہ اگر ح ر-۱ (لا) اور ح ر(لا) کی ایک ہی علامت ہو تو ح ر(لا) اور ح ر+۱ (لا) کی مختلف علامتین ہونگین اور بالعکس اسکی پس ثابت ہوا کہ اگر لا کی نوبت اوس قیمت پر پہونچی کہ وہ کسی ایک جملہ مستعان کو معدوم کردے تو اوسی سٹرم کی جملون مین نہ کوئی تغیر علامت گم ہوتا ہے نہ پیدا ہوتا ہے

کوئی قیمت لا کی دو متصل کی جملون کو معدوم ایک ہی وقت مین نہین کرسکتی اگر دو یا زیادہ جملے جو متصل نہ ہوں معدوم ہوجائین تو اگر ح (لا) اونمین سی ایک ہوگا تو موافق نتیجہ اول کے یہہ مستنبط ہوگا کہ ایک تغیر علامت گم ہوگا جب کہ لا کی زیادہ ہوکر اوس قیمت پر نوبت پہونچیگی اور اگر ح (لا) اونمین سی نہ ہو تو بموجب نتیجہ دوم کی یہہ اخذ ہوگا کہ کوئی تغیر علامت گم نہین ہوئی

پس ہم نے ثابت کردیا کہ جب لا زیادہ ہوتا ہی تو سٹرم کی جملون مین کبھی ایک تغیر علامت گم نہین ہوتا الا اوس صورت مین کہ لا کی نوبت مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمت پر پہونچی اور کبھی تغیر علامت پیدا نہین ہوتا پس اسی معلوم ہوا کہ تعداد تغیرات علامت کی جو اسطرح گم ہوتی ہی کہ لا از زیادہ ایک قیمت سے ہوکر بڑی قیمت صہ پر اپنی نوبت پہونچائی وہ برابر ہوتی ہی مساوات ح (لا) = ۰ کی اون قیمتون کی تعداد کے جو درمیان سہ اور صہ کے واقع ہوں

(۱۹۵) ہم نے ثابت کردیا ہی کہ سٹرم کی جملون مین تغیرات علامت کی اندر کوئی تبدل اس سبب سی نہین واقع ہوسکتا کہ لا کی نوبت اوس قیمت پر پہونچی کہ وہ کسی ایک جملہ مستعان کو

معدوم کردی مگر اکثر علامات + اور − کی ترتیب میں جملوں کے سلسلہ کی اندر ہو
تبدل واقع ہوتی ہیں مثلاً فرض کرو کہ ا اور ب دو قیمتیں مساوات ح (لا) = ۰ کی ہو اور ا بہ نسبت ب کی کم ہی تو
ح (لا) اور ح لا کی مختلف علامتیں ماقبل لا = ا کی ہونگیں اور ایک ہی علامتیں مابعد
لا = ا کے ہونگیں اب ماقبل لا = ب کی علامتیں ح (لا) اور ح، (لا) کے پہر مختلف
ہونگیں فی الحقیقت مساوات ح، (لا) = ۰ کی ایک قیمت درمیان لا = ا اور لا = ب
کے ہوتی ہی پس ح، (لا) کی نوبت مثبت سی منفی پر پہونچنی چاہیی یا بالعکس اسکے درمیان لا = ا اور
لا = ب کی پس ح، (لا) کا مثبت سی منفی کی طرف جاتا یا بالعکس اسکی درمیان لا = ا
اور لا = ب کی ہونا کل تعداد تغیرات علامت سٹرم کی جملوں کی سلسلہ کی کل تعداد
تغیرات علامت میں کچہ تبدل نہیں کرسکتا یہہ ہمنے ثابت کردیا مگر سلسلہ میں جو تقسیم علامت
+ اور − کی ہی اوسمیں وہ تبدل پیدا کرتا ہی اور اسی یہہ بات ممکن ہی کہ جب لا زیادہ
ہو کر ا پر اپنی نوبت پہونچانی سی ایک تغیر علامت کو گم کری تو اسکی بعد ایک اور تغیر علامت گم ہوگا
جب لا کی نوبت زیادہ ہو کر ب پر پہونچی
اس دفعہ سی کچہ سٹرم صاحب کی اثبات ضابطہ میں کوئی امر زیادہ نہیں ہوتا فقط اوسی طالب علموں کے امداد اس باب
میں ہوتی ہی کہ کس طرح تغیرات علامت گم ہوتے ہیں

(۱۹۶) سٹرم کی جملوں کی سلسلہ میں تغیرات علامت کی تعداد گننی میں یہہ ہوسکتا ہی کہ قیمت لا کی
جسپر ہم بحث کررہی ہیں ان جملوں میں سی کسی کو فنا کردی تو اس بات کا لحاظ کرنا چاہیی کہ ہم کوئی
علامت اپنا مثبت کی یا منفی کی جملہ معدوم سی منسوب کریں کیونکہ علامتیں اوسکی ماقبل اور مابعد جملوں کے ضرور
مخالف ہوتے ہیں

(۱۹۷) مساوات ح (لا) = ۰ کی تمام حقیقی قیمتوں کی تعداد دریافت کرنی کی لئی لا کی جگہ −∞
اور پہر +∞ سٹرم کی جملوں میں رکہو پس اول صورت میں جتنی تعداد تغیرات علامت کی ہوگی
اوسکو جسقدر ازدیاد دوسری صورت کی تغیرات علامت کی تعداد پر حاصل ہوگا اوسیقدر تعداد

مساوات کی کل حقیقی قیمتوں کی ہوگی جب لا برابر + ∞ یا - ∞ کی کیا جاے تو جملوں میں سے ہر ایک جملہ کی وہی علامت ہوگی جو لا کی اعلی قوت کی علامت اوس جملہ میں تہا ہو

(۱۹۸) فرض کرو کہ ح (لا) کی درجی کون تعبیر کریں تو تعداد مستعان جملوں ح، (لا) وح۲ (لا)... اکثر ن ہوگی کیونکہ ہر باقی اکثر ایک درجہ کم بہ نسبت باقی ماقبل کی ہوگی پس یہ ہم فرض کرینگے کہ جو ح (لا) کا درجہ ہی وہی تعداد مستعان جملوں کی ہی اور ح (لا) میں جو اعلی قوت لا کی ہے اوسکی امثال مثبت ہین

اول اگر کل مستعان جملوں کی اول رقموں کی مثبت امثال ہوں تو مساوات ح (لا) = ۰ کی تمام قیمتیں حقیقی ہونگیں اسواسطی کہ سٹرم کی جملی مثبت ہونگی جب لا = + ∞ کے ہو اور وہ علی التبادل مثبت اور منفی ہونگیں جب لا = - ∞ پس ن تغیرات علامت گم ہوینگے جب لا کی نوبت - ∞ سی + ∞ تک پہونچی

دوم اگر اول رقموں کی سب جملوں میں امثال مثبت نہ ہوں تو خیالی قیمتوں کے زوج اوتنی ہی ہونگے جتنی کہ تغیرات علامت واقع ہونگی ہر تغیر کی واسطی ایک زوج ہوگا

فرض کرو کہ ان امثال کی سلسلہ میں م تغیرات علامت اور ن - م تواترات علامت ہین پس جب لا = + ∞ تو م تغیرات علامت اور ن - م تواترات علامات سٹرم کی جملوں میں ہیں اب لا کو + ∞ سی - ∞ میں بدل دو تو تغیرات علامت کی جگہہ تواترات علامت ہوجائینگی اور تواترات علامت کی جگہ تغیرات علامت ہوجائینگی پس جب لا = - ∞ تو ن - م تغیرات علامت ہونگے اسیواسطے تغیرات علامت کی تعداد جب لا = - ∞ کی اون تغیرات علامت کی تعداد سی کہ لا = + ∞ کے بقدر ن - ۲م کے زیادہ ہوگی اور ن - ۲م حقیقی قیمتیں مساوات ح (لا) = ۰ کی ہونگین اور اسیواسطے ۲م خیالی قیمتوں کی تعداد ہوگی

اسی معلوم ہوا کہ ایک مساوات کی تمام قیمتوں کی حقیقی ہونی کی لئی یہہ ضرور ہی کہ کل مستعان جملوں کی اول رقموں کی امثال ایکہی علامت رکہیں

(۱۹۹) فرض کرو کہ مستعان جملوں کی اندر ہم کو یہہ دریافت ہوا کہ ح ر (لا) کی علامت نہیں بدل سکتی

پس جتنی جملی اوسکی آگی لکلی اون سیرکچھہ لحاظ نہ کرو اور سلسلہ ح (لا) وح (لا) وح۲ (لا)۔ ح (لا) کے اندر تعداد تغیرات علامت کی شمار کرو کیونکہ مسٹرم صاحب کی ضابطہ کے اثبات مین آخر جملہ مستعان کی لابدی خاصیت یہہ ہونی چاہیئ کہ وہ معدوم نہ ہوتا ہو اور چونکہ ح ر (لا) معدوم نہین ہوتا تو ح (لا) وح۱ (لا) وح۲ (لا)۔۔ ح ر (لا) پر اثبات ضابطہ کا حاوی ہوگا یہہ بات عمل مین بڑی کام آنے کی ہی کیونکہ جب یا وایتن اعلی درجہ کی ہون تو وہان تمام مسٹرم کی جملون کا سلسلہ دریافت کرنا بڑی محنت کا کام ہوتا ہی اسواسطے ایسی قاعدہ کا بنانا کہ جسی یہہ مشقت شاقہ تمام سلسلہ کی بنانی کی چھوٹ جای نہایت ضروری ہے

(۲۰۰) فرض کرو کہ مح (لا) ایک جملہ ایسا ہی کہ اوسمین اور ح (لا) مین کوئی جزضربی مشترک نہین ہے اور فرض کرو کہ مح (لا) اورح۱ (لا) مین جب کوئی قیمت ح (لا) = ۰ کے بجای لا کی مندرج کیجاے تو اونکی ایک ہی علامت ہوتی ہی تو ہم مح (لا) کو بجای ح۱ (لا) کے کام مین لاسکتی ہین اور باقی مستعان جملے ح (لا) اور مح (لا) سی بجای ح (لا) اورح۱ (لا) کے مستنبط کرسکتی ہین اسواسطی کہ اگر مسٹرم صاحب کی ضابطہ کی اثبات کو دوبارہ کام مین لائین تو یہہ معلوم ہوگا کہ ضابطہ کی دو اصلی خاصیتین ان جملون کی نئی سلک مین بہی موجود ہین ایک یہہ کسی جملہ مستعان کی معدوم ہونے کوئی تغیر علامت گم نہین ہوتا دوم یہہ کہ ح (لا) کے معدوم ہونی سی ایک تغیر علامت گم ہوتا ہے

(۲۰۱) ابتک ہم نی مسٹرم صاحب کی ترکیب کے اندر مساوات کو برابر قیمتون سی صاف کرکی لکھا ہے لیکن اب یہہ ثابت کرتی ہین کہ اس قید کے کچھہ ضرورت نہین اور اس ضابطہ سی ہمیشہ تعداد جدا جدا قیمتون کی حدود معینہ کی اندر معلوم ہوجائیگی اور قیمتون کے مکررانی سے کچھہ لحاظ نہین کیا جائیگا مثلاً فرض کرو کہ ا قیمت ع دفعہ اور ب قیمت ق دفعہ مساوات ح (لا) = ۰ مین واقع ہوتی ہے

فرض کرو کہ ح (لا) = $(لا-ا)^{ع}$ $(لا-ب)^{ق}$ (لا-س) (لا-د) ۔۔۔

پس ح۱ (لا) = $(لا-ا)^{ع-۱}$ $(لا-ب)^{ق-۱}$ [ع (لا-ب) (لا-س) (لا-د) ۔۔۔ + ق (لا-ا) (لا-س) (لا-د) ۔۔۔ + ۔۔۔]

پس (لا – ا)^ع-۱ اور (لا – ب)^ق-۱ وفی اعظم ح (لا) اور ح۱ (لا) کا ہوگا
اور یہہ جملہ تمام مستعان جملون ح۲ (لا) وح۳ (لا) ۰۰ ح۱ (لا) کو جو دفعہ ۱۹۴ میں
لکھی ہین تقسیم کریگا

اب فرض کرو کہ ھح (لا) = (لا – ا) (لا – ب) (لا – س) (لا – د) ۰۰۰

مح (لا) = ع (لا – ب) (لا – س) (لا – د) ۰

+ ق (لا – ا) (لا – س) (لا – د) ۰ ۰ ۰

+ (لا – ا) (لا – ب) (لا – د) ۰ ۰ ۰

+

تو مح (لا) اول جملہ مشتقہ ھح (لا) کا نہین ہے اسواسطے کہ
اگر ع = ۱ اور ق = ۱ ہو تو سی جو مح (لا) ہو جائیگا وہی جملہ مشتقہ ہوگا لیکن جب لا = ا
یا ب یا س وغیرہا کے ہو تو مح (لا) کی اور ھح (لا) کی اول جملہ مشتقہ کی ایکہی علامت ہوتی ہے
اسی معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۲۰۰ کے ہم مساوات ھح (لا) = ۰ کی حقیقی قیمتون کا
ھح (لا) اور مح (لا) کو اول دو جملی سٹرم کی بنا کر اور انسی اور باقی جملے حاصل کر کر فیصلہ کرسکتے ہین
سٹرم کی جملون کا سلسلہ جو ح (لا) اور ح۱ (لا) سی حاصل ہوتا ہی وہ اوس سلسلہ کی
کہ ھح (لا) اور مح (لا) سی حاصل ہوتا ہی اس سبب سی فرق رکہتا ہی کہ اسکی ہر رقم مین ایک
جز ضربی زائد (لا – ا)^ع-۱ (لا – ب)^ق-۱ ہے

پس جب کوئی قیمت لا کی لگائین تو پہلی سلسلہ کی رقموں کی علامتین وہی ہونگین جو
دوسرے سلسلہ کی رقموں کی ہین یا اوسکی بالکل بالعکس ہونگین اسلیے تعداد تغیرات علامتونکی وہی رہیگی
اسی معلوم ہوا کہ سٹرم کی جملون کی سلسلہ کی امتحان کرنی سی ہم کو یہہ بات دریافت ہو سکتی ہے
کہ مساوات ھح (لا) = ۰ کی کتنی قیمتین حدود معینہ مین واقع ہین یعنی مساوات ح (لا) = ۰ کی
قیمتین جدا جدا مفصل اون حدود مین دریافت ہوجاتی ہین

پس یہہ کچھہ ضرور نہیں کہ سٹرم کی ترکیب سے پہلے ہم متساوی قیمتوں کی تحقیقات مساوات میں کریں
بلکہ جب سٹرم کی جملوں کا حساب لگا لیگے تو ہم کو خود بخود مساوات کی برابر قیمتوں پر اگر وہ ہونگیں
اطلاع اس سبب سے ہو جائیگی کہ اونکی موجود ہونے کی صورت میں باقی اخر صفر ہوگی

(۲۰۲) جس عمل سے کہ مستعان جملے حاصل ہوتی ہیں اوسکی اندر بعد اول جملے کی حاصل ہونے کے
مثل عمل وفق اعظم کی ہم مقسوم اور مقسوم علیہ کو اکثر کسی مثبت عدد میں ضرب دیجاتی ہیں یا کسی
مثبت عدد پر تقسیم کرجاتی ہیں اور اسی کچھہ فرق عمل میں نہیں اتا اسلئے کہ مستعان جملے مثبت اعداد
کی ضرب و تقسیم سے علامتوں میں اپنی متبدل نہیں ہوتے

سٹرم صاحب کے ضابطہ سے ہم مساوات مفروضہ کی حقیقی قیمتوں کی تعداد دریافت کرسکتے ہیں
سٹرم کی جملوں کی سلسلہ میں لا کی جگہہ متواتر اعداد صحاح مندرج کریں تو اوسی یہہ دریافت
ہوگا کہ کونسی دو متصل کی اعداد صحاح کی درمیان قیمتیں واقع ہیں اور اگر یہہ دریافت ہو کہ دو اعداد
معینہ کی درمیان ایک قیمت یا زیادہ قیمتیں واقع ہیں تو پھر اون اعداد صحاح کی مابین جو اعداد مکسور
واقع ہوں اونکو بجای لا کی مندرج کرتی جاتی ہیں جب تک کہ اخر کو ہمیں یہہ معلوم ہوتا ہے کہ
ایک قیمت کل دو عددوں کے درمیان واقع ہے

(۲۰۳) اب ہم بعض مثالیں حل کرتے ہیں

فرض کرو کہ ح (لا) = لا^{۳} − ۳ لا^{۲} − ۴ لا + ۱۳

یہاں ح$_{۱}$ (لا) = ۳ لا^{۲} − ۶ لا − ۴

ح$_{۲}$ (لا) = ۲ لا − ۵

ح$_{۳}$ (لا) = +۱

بموجب دفعہ ۱۹۸ کے مساوات کی تمام قیمتیں مثبت ہیں اب سلسلہ علامتوں کا لا کی قیمتوں کے موافق یہہ ہوگا

	ح (لا)	ح$_{۱}$ (لا)	ح$_{۲}$ (لا)	ح$_{۳}$ (لا)
۱	+	−	−	+
۲	+	−	−	+
۳	+	+	+	+

یہاں جب کہ لا = ۲ کی ہو تو دو تغیر علامت ہین اور جب لا = ۳ کی ہو تو کوئی تغیر علامت نہیں ہوتا
اسی معلوم ہوا کہ دو مثبت قیمتیں ۲ اور ۳ کی درمیان واقع ہین اور کوئی اور مثبت قیمت نہیں ہے
اور یہہ بھی دریافت ہوتا ہی کہ جب لا = −۳ ہو تو علامات متواترہ یہہ ہوتے ہین − + − + اور جب لا = −۲
تو وہ + + − + اس سے ایک تغیر علامت −۳ سی −۲ پر نوبت پہونچنی سی کم ہوتا ہے
اسواسطے منفی قیمت −۲ اور −۳ کی درمیان واقع ہی اب دو مثبت قیمتوں کی جدا جدا کرنے کے
لئی ہم کو ۲ اور ۳ کے مابین اعداد کو لا کی جگہ رکھنا چاہئی مثلاً فرض کرو کہ ہم لا = ۲ ½ رکھین
تو علامات متواترہ یہہ ہوتی ہین − − ۰ + پس ایک تغیر علامت واقع ہوتا ہے
خواہ ۰ کو + یا − خیال کریں پس ۲ سی ۲ ½ پر نوبت پہونچانی سی ایک تغیر علامت کم ہوتا ہے
اسواسطے ایک قیمت ۲ اور ۲ ½ کے درمیان واقع ہے
اور اسی معلوم ہوا کہ دوسری قیمت ۲ ½ اور ۳ کے درمیان واقع ہوگی
اب پھر فرض کرو کہ ح (لا) = لا^۴ − ۶ لا^۳ + ۵ لا^۲ + ۴ ۱۱ لا − ۴ = ۰

یہاں ح~۱~ (لا) = لا^۳ − ۹ لا^۲ + ۵ لا + ۷ جز ضربی ۲ کو ساقط کر دیا ہی

ح~۲~ (لا) = ۱۷ لا^۲ − ۷۵ لا − ۵

ح~۳~ (لا) = ۱۵۲ لا − ۷۵۹

ح~۴~ (لا) = +

اس مثال میں ح~۴~ (لا) کا حساب لگانا پیچیدگی سی خالی نہیں مگر ہمارے مطلب کے برابر کی فقط اتنی بات جاننی کافی ہی کہ
کہ علامت کیا ہی پس جب ہم کو یہہ تحقیق ہو گیا کہ وہ مثبت ہی تو ہم اوسکا حساب ٹھیک ٹھیک نہیں کر سکتی اور صرف

ح~۴~ (لا) = + لکھ لیتے ہیں

بموجب دفعہ ۱۹۸ کے مساوات کی تمام قیمتیں حقیقی ہیں
لا کی قیمتوں کے موافق سلسلہ علامات یہہ ہے

	ح(لا)	ح₁(لا)	ح₂(لا)	ح₃(لا)	ح₄(لا)
۲-	+	-	+	-	+
۱-	-	-	+	-	+
۰	-	+	-	-	+
۱	+	+	-	-	+
۲	+	-	-	-	+
۳	+	-	-	-	+
۴	+	+	+	+	+

۲- اور ۱- کے درمیان ایک اور ۰ اور ۱ کی درمیان ایک تغیر علامت گم ہوتا ہی اور ۳ اور ۴ کی درمیان دو تغیرات علامت گم ہوتے ہین

اگر ہم ۳½ بجای لا کی رکہین تو علامات متواترہ - - + + حاصل ہوتی ہین انہین ایک تغیر علامت ہے پس ایک قیمت مساوات کی ۳ اور ۳½ کی درمیان واقع ہوتی ہین اسیواسطے دوسری قیمت ۳½ اور ۴ کی درمیان واقع ہوتی ہے

اب فرض کرو کہ $ح(لا) = ۲لا^{۴} - ۳لا^{۲} + ۱۰لا - ۴۹ = ۰$

یہان $ح_{۱}(لا) = ۴لا^{۳} - ۳لا + ۵$ جز ضربی ۲ کو ساقط کر دیا ہے

$ح_{۲}(لا) = ۳لا^{۲} - ۱۵لا + ۹۸$

اب یہ بات بادی النظر مین معلوم ہوتی ہی کہ مساوات $ح_{۲}(لا) = ۰$ کی خیالی قیمتین ہین $ح_{۲}(لا)$ کبہی کسی لا کی حقیقی قیمت سی معدوم نہین ہو سکتا اسواسطی بموجب دفعہ ۱۹۹ کی اس مثال مین سٹرم صاحب کی زیادہ قیمتون کی دریافت کرنی کی ضرورت نہین ہے جب لا = -∞ تو علامات متواترہ + - + اور جب لا = ∞ تو علامات متواترہ + + + پس مساوات کی دو حقیقی قیمتین اور دو خیالی قیمتین ہین اور حقیقی قیمتون مین سی ایک مثبت اور دوسری منفی بموجب دفعہ ۲۱ کے ہے

پندرہوان باب فوریر کا ضابطہ

(۲۰۴) جس سوال کی حل کرنی مین دو سو برس سی اکثر بڑی بڑی مہندسین توجہ کر رہے تہی وہ سٹرم صاحب کی ضابطہ سی تمام اور کمال حل ہو گیا یہہ ضابطہ پیرس مین سنہ ۱۸۳۵ع مین ایک کتاب مین منطبع ہوا سٹرم صاحب سی پہلی جن مہندسین نی اس سوال کی حل کرنی مین توجہ اور کوشش کی اونمین سے لودن صاحب اور فوریر صاحب کا حال قابل لکہنی کے ہے

ان دونو مہندسین کی ترکیبین ایک مسئلہ سی نکلتی ہین اور اس مسئلہ کا موجد اہل انگلستان
کے نزدیک تو فوریر صاحب ہین اور اہل فرانس کے نزدیک بوڈن اور فوریر دونو کو اس سلسلہ کا توارد ہوا
مسائل معادلات کا باب بین کتاب فوریر کی سنہ ۱۸۳۱ مین منطبع ہوئی اور بوڈن کی کتاب اسی باب مین
سنہ ۱۸۰۷ مین منطبع ہوئی مگر اس کی شہادت موجود ہی کہ فوریر نی اپنی اس مسئلہ کو طالب علموں کے
روبرو لکچر مین بوڈن کی کتاب کے انطباع سی پہلی بیان کیا تہا اب ہم اس مسئلہ کو ثابت کرتے ہین

(۲۰۵) **فوریر صاحب کا ضابطہ** فرض کرو کہ ح (لا) جملہ جبریہ ن درجہ کا ہو اور
ح$_1$ (لا) اور ح$_2$ (لا) ... ح$_ن$ (لا) جملی مشتقہ جملہ ح (لا) کی ہون اور سہ کوئی سی مقدار ہو
اور صہ دوسری مقدار اوس سی بڑی جبر مقابلہ کی اعتبار سی ہو تو مساوات ح (لا) = ۰ کی اصلی
قیمتین سہ اور صہ کی درمیان بڑی اوس ازدیاد سی نہین ہو سکتین جو تعداد تغیرات علامت
سلسلہ ح (لا) و ح$_1$ (لا) و ح$_2$ (لا) ... ح$_ن$ (لا) کو جب لا = سہ کے ہو
اوس تعداد تغیرات علامت پر اس سلسلہ کے حاصل ہی کہ جب لا = صہ کے ہو
ہم اس تمام سلسلہ ح (لا) و ح$_1$ (لا) و ح$_2$ (لا) ... ح$_ن$ (لا) کو فوریر کے جملے کہینگے
فوریر کے جملون مین سی کسی جملہ کی اندر تبدل علامت جب تک نہین واقع ہو گا کہ لا کی نوبت اوس قیمت تک پر
پہونچی کہ وہ جملہ کو معدوم کر دی اب چار صورتین بحث طلب ہین

اول فرض کرو کہ لا = س کی ح (لا) کو معدوم کرتا ہی اور ح$_1$ (لا) معدوم نہین ہوتا
اب لا کی جگہ س - صہ رکہو اور صہ ایک مثبت مقدار ہی تو صہ کو ایسا چہوٹا فرض کر سکتی ہین کہ
علامت ح (س - صہ) کی وہی ہو جو - صہ ح$_1$ (س) کی ہی اور بموجب دفعہ ۱۴۷ کے
علامت ح$_1$ (س - صہ) کی وہی ہی جو ح (س) کی ہی پس اگر لا = س - صہ اور صہ کافی
چہوٹا فرض کیا جاے تو ح (لا) اور ح$_1$ (لا) کی مختلف علامتین ہونگیں
اسیطرح یہہ ثابت ہو سکتا ہی کہ اگر لا = س + صہ اور صہ چہوٹا کافی مقرر کیا جاے تو ح (لا)
اور ح$_1$ (لا) کی ایک ہی علامت ہو گی

پس جب لا بڑھ کر مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمت غیر مکررہ س پر نوبت پہونچاتا ہی
تو فوریر کے جملون مین سی ایک تغیر علامت گم ہوجاتا ہے

دوم فرض کرو کہ جب لا = س تو ح (لا) معدوم ہوتا ہی اور اوسکی ساتھہ ہی جملی مشتقہ
ح$_1$ (لا) و ح$_2$ (لا) ۰۰۰ ح ر$_{-1}$ (لا) تک معدوم ہوجاتی ہین اور ح ر (لا) معدوم نہین ہوتا
س ـ صہ بجای لا کی رکھو اور صہ مثبت مقدار ہی تو صہ کو ایسا چھوٹا فرض کرسکتی ہین کہ ان رقموں کے سلسلہ کے
ح (س ـ صہ) و ح$_1$ (س ـ صہ) و ح$_2$ (س ـ صہ) ۰۰۰ ح ر$_{-1}$ (س ـ صہ) و ح ر (س ـ صہ)
علامتین جداگانہ وہی ہون جو ان رقموں کے سلسلہ کی ہین کہ
(ـ صہ)^ر ح ر (س) و (ـ س)$^{ر-1}$ ح ر (س) و (ـ س)$^{ر-2}$ ح ر (س) ۰۰۰ ـ صہ ح ر (س) ح ر (س)
دفعات ۱۱۰ اور ۱۴۱ دیکھو پس اگر لا = س ـ صہ اور صہ چھوٹا کافی مقرر کیا جای تو
فوریر کے اول ر + ۱ جملون مین ر تغیرات علامت پیدا ہوتے ہین
اسیطرح یہہ ثابت ہوسکتا ہی کہ اگر لا = س + صہ اور صہ کافی چھوٹا مقرر کیا جاے تو فوریر کے
اول ر + ۱ جملون مین کوئی تغیر علامت نہین پیدا ہوتا
پس جب لا بڑھ کر اپنی نوبت س پر پہونچاتا ہی جو مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک ایسی قیمت ہی کہ ر دفعہ مکرر آتی ہے
تو فوریر کے جملون مین سی ر تغیرات علامت گم ہوتے ہین

سوم فرض کرو کہ جب لا = س تو مشتقہ جملون مین سی ایک جملہ معدوم ہوتا ہے
مگر اوسکے طرفین متصلہ کی جملی معدوم نہین ہوتی مثلاً فرض کرو کہ
جب لا = س کے تو ح ر (لا) معدوم ہوتا ہی مگر ح ر$_{-1}$ (لا) اور ح ر$_{+1}$ (لا) مین سے
کوئی معدوم نہین ہوتا پس اگر صہ چھوٹا کافی فرض کیا جاے تو جب لا = س ـ صہ تو علامتین
ح ر$_{-1}$ (لا) اور ح ر (لا) اور ح ر$_{+1}$ (لا) کی جداگانہ وہی ہونگین جو
ح ر$_{-1}$ (س) اور ح ر (س) اور ح ر$_{+1}$ (س) کی ہین اور جب لا = س + صہ تو علامتین
وہی ہونگین جو ح ر$_{-1}$ (س) و صہ ح ر$_{+1}$ (س) و ح ر$_{+1}$ (س) کی ہین

پس اگر ح ر-۱ (س) اور ح ر+۱ (س) کی ایک ہی علامت ہو تو فوریر کے جملوں میں دو
تغیرات علامت گم ہونگی اور جب لا کی نوبت بڑھ کر س پر پہونچے اور اگر
ح ر+۱ (س) اور ح ر+۱ (س) کی مختلف علامتیں ہوں تو فوریر کے جملوں میں نہ تو تغیر
علامت گم ہوتا ہی نہ پیدا ہوتا ہے

چہارم فرض کرو کہ جب لا = س تو کئی ایک متواتر جملی معدوم ہو جاتی ہیں مثلاً جب لا = س
تو فرض کرو کہ م جملی ح ر (لا) و ح ر+۱ (لا) و ۰۰ ح ر+م-۱ (لا) معدوم ہوتے ہیں اور
اور ح ر-۱ لا اور ح ر+م (لا) معدوم نہیں ہوتے تو موافق سابق کے عمل کرو
اور صہ کو مثبت اور چھوٹا کافی مقرر کرو تو نتایج مفصلہ ذیل بلحاظ م + ۲ ارقام
ح ر-۱ (لا) و ح ر (لا) ۰۰۰ ح ر+م-۱ (لا) و ح ر+م (لا) کے حاصل ہونگے

(۱) فرض کرو کہ م جفت ہی اگر ح ر-۱ (س) اور ح ر+م (س) کی ایک ہی علامت ہو تو ارقام میں
جب لا = س - صہ کے ہو م تغیرات علامت واقع ہونگی اور جب لا = س + صہ کی ہو تو کوئی تغیر
علامت نہیں واقع ہوگا اگر ح ر-۱ (س) اور ح ر+م (س) کی مختلف علامتیں ہوں تو ارقام میں
جب لا = س - صہ کی ہو م + ۱ تغیرات علامت واقع ہونگی اور جب لا = س + صہ کے ہو
تو ایک تغیر علامت واقع ہوگا پس فوریر کی جملوں میں دونو صورتوں کی اندر جب لا کی نوبت س پر پہونچی
م تغیرات علامت گم ہونگے

(۲) فرض کرو کہ م طاق ہی اگر ح ر-۱ (س) اور ح ر+م (س) کی ایک ہی علامت ہو
تو ارقام میں جب لا = س - صہ کی ہو م + ۱ تغیرات علامت واقع ہونگی اور جب
لا = س + صہ کے ہو تو کوئی تغیر علامت نہیں واقع ہوگا پس فوریر کی جملوں میں جب لا کی بڑھ کر نوبت
س پر پہونچتی ہی تو م + ۱ تغیرات علامت گم ہوتی ہیں اگر ح ر-۱ (س) اور ح ر+م کی علامتیں مختلف ہوں
تو ارقام میں جب لا = س - صہ کی ہو م تغیرات علامت اور جب لا = س + صہ کے ہو تو
ایک تغیر علامت واقع ہوتا ہی پس جب لا کی بڑھ کر نوبت س پر پہونچی ہی تو فوریر کے

جملے ۴ - التغیرات علامت کو کم کرتے ہیں

المختصر یہہ ہے کہ فوریر کے جملے کبھی تغیر علامت حاصل نہیں کرتی بلکہ جب لا کی سرہ کو نوبت س پر کہ ایک قیمت مساوات ح (لا) = ۰ کی ہی پہونچی ہی تو ایک تغیر علامت گم ہو جاتا ہے

پس ضابطہ ثابت ہوا

(۲۰۶) دفعہ ۲۰۵ مین جو دعوی ہم نے اسانی کی واسطے بیان کیا تہا وہ ثابت ہوا اور اوسکے علاوہ اور باتین بہی ثابت ہین ہم نے اونکو اس سبب سے دفعہ ۲۰۵ مین نہین بیان کیا تہا کہ دقت نہ واقع ہو یہہ ظاہر ہی کہ جب فوریر کے جملوں کی تغیرات علامت کی تعداد مین تبدل واقع ہوتا ہے باستثنا اوس وجہ کی جو ازدیاد غیر مقررہ سے مساوات معلوم کی قیمت پر نوبت پہونچتی ہی جفت تعداد تغیرات علامت کی گم ہوتی ہی الحاصل اگر متواتر سہ اور اوسی بڑا عدد صہ فوریر کی جملوں مین مندرج کرین تو یہہ نتیجہ حاصل ہوگا کہ

(۱) فرض کرو کہ فوریر کی جملوں مین کوئی تغیر علامت گم نہین ہوتا تو کوئی قیمت مساوات کی سہ اور صہ کے درمیان نہین واقع ہوگی

(۲) فرض کرو کہ فوریر کی جملوں مین طاق تعداد تغیرات علامت کی گم ہوتی ہی تو اوسی ہم کو یقینی معلوم ہوتا ہے کہ قیمتین مساوات کی جنکی تعداد طاق ہے سہ اور صہ کی درمیان واقع ہین لیکن ہم یہہ نہین کہہ سکتے وہ کونسی طاق تعداد ہی الا اوس صورت مین کہ ایک تغیر علامت گم ہوا ہو تو ہم کو یقینی معلوم ہوتا ہی کہ ایک قیمت

(۳) فرض کرو کہ فوریر کی جملوں مین جفت تعداد تغیرات علامت کی گم ہوتی ہی تو اوس سے ہم یہہ نتیجہ نکالتے ہین کہ یا تو کوئی قیمت سہ اور صہ کی درمیان نہین واقع ہی اور اگر واقع ہین تو جفت تعداد اونکی ہے

(۲۰۷) فوریر کے ضابطہ مین یہہ ایک فایدہ ہی کہ اوسکا استعمال آسانی سے ہو سکتا ہی کیونکہ جملہ معلوم کی جملے مشتقہ آسانی سے دریافت ہو جاتی ہین مگر یہہ نقصان بہی ہی کہ اوسمین امتحان لاتعداد کرنی پڑتی ہین اگر دو قیمتین بہت قریب قریب ہوں تو اونکی بیون کے جنکی اندر وہ واقع ہوتی ہین بہت سی چہوٹی چہوٹی حصے کرنی پڑتی ہین تا کہ اونکی تمیز خیالی قیمتوں سے ہو جاوے اور اوسکی بہی خبر درست پڑتی ہے

فوریر کے ضابطہ کی موافق عمل کرنی سی پہلی اس بات کا امتحان کرین کہ مساوات برابر قیمتین رکھتی ہی یا نہین اگر ایسا نہ کرینگے تو مکرر قیمتون کی جفت تعداد ہم کو معلوم نہین ہوگی

(۲۰۸) بوڈن اور فوریر دونون نی ترکیبین بون مشتبہ کی امتحان کرنی کی لکھی ہین تاکہ یہہ بات ظاہر ہوجاے کہ قیمتین مساوات مفروضہ کی اوس طون کی اندر واقع تہین یا نہین لیکن ان ترکیبون کا بیان کرنا بیفایدہ ہے اسلئی کہ سٹرم کی ضابطہ سی مطلب یقینی حاصل ہوجاتا ہی اور اوسمین کچہ دقت بہی نہین پڑتی ہے

(۲۰۹) یہہ بہی ثابت ہوسکتا ہی کہ فوریر کی ضابطہ کی اندر ڈس کارٹس کے علامتون کا بہی قاعدہ داخل ہے فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ مساوات کامل ہے

اگر لا = ۰ فوریر کے جملون مین رکہین تو علامتین وہی ہونگین جو جملہ ح (لا) مین بائین طرف سی دائین طرف تہین اور اگر ہم لا = ∞ کے فوریر کے جملون مین رکہین تو علامتین سب مثبت ہونگین اسی معلوم ہوا کہ فوریر کی ضابطہ کے موافق مساوات ح (لا) = ۰ کی مثبت قیمتین زیادہ تعداد مین ح (لا) کی تغیرات علامت کی تعداد سی نہین رکہہ سکتی اگر مساوات مفروضہ کامل نہ ہو تو ارقام معدومہ کو لکہکر اونکی امثال صفر بناکر لکہہ دو اور ان امثال پر علامتین ایسی لگ سکتی ہین کہ فوریر کی جملون مین تغیرات علامت کی اوس حالت مین کہ ان ارقام کا بہی شمار ہوا اوتنی ہی تعداد ہوجتنی کہ بغیر رقمون کی تعداد تغیرات علامت تہی قاعدہ علامات کا وہ جز جو منفی قیمتون سی متعلق ہی وہ اوس جز سی کہ مثبت قیمتون سی متعلق ہے مستنبط ہوسکتا ہے دفعہ ۶۳ دیکہو

(۲۱۰) مساوات کی مثبت قیمتون کی اعلی حد غائی دریافت کرنی کی ترکیب نیوٹن صاحب کے ہی وہ بہی فوریر کی ضابطہ مین داخل ہی دفعہ ۹۵ دیکہو اسواسطے کہ اگر ح (لا) = ۰ مساوات ہو تو نیوٹن کی ترکیب کے موافق ہم کو صہ کی قیمت ایسی دریافت کرنی چاہیی کہ جب لا = صہ تو فوریر کے جملے تمام مثبت ہون پس موافق ضابطہ فوریر کی مساوات مفروضہ کی کوئی قیمت درمیان لا = صہ اور لا = +∞ کے نہین ہوگی

سولہوان باب لاگرانشز کی ترکیب تقریب

(۲۱۱) ہم نی ابہی بیان کیا ہی کہ قیمتین ناطقہ محدودہ کن ترکیبون سی دریافت ہوتی ہین اب ہم یہہ بیان کرتے ہین کہ مساوات کی حقیقی اصم قیمتون کی قدر عددی تقریباً کن حسابون سی دریافت ہوتے ہین

سٹرم صاحب کی ضابطہ سی یہہ بات ہمیشہ ہم کو معلوم ہوسکتی ہی کہ کتنی قیمتین ایک بُون معلوم مین واقع ہوسکتی ہین اور پہر ہم اس بُون معلوم کو ایسی چہوٹی چہوٹی بُون مین تقسیم کرسکتی ہین کہ جنکی درمیان مین جدا جدا ہر ایک قیمت واقع ہو

فرض کرو کہ ہم کو معلوم ہی کہ مساوات کی ایک ہی قیمت ہی اور صرف ایک ہی قیمت دو مقادیر معلوم سہ اور صہ کی درمیان واقع ہی اب ہم یہہ دریافت کرنا چاہتی ہین کہ اس قیمت کی قدر تقریباً کیا ہی سہ اور صہ کی درمیان ایک مقدار لر لو اور اوسکو بجای لا کے ح (لا) مین رکہو تو ح (لر) کی علامت سی ہم کو یہہ بات معلوم ہوجائیگی کہ قیمت سہ اور لر کے درمیان واقع ہے یا لر اور صہ کے درمیان فرض کرو کہ وہ سہ اور لر کے مابین واقع ہی تو پہر بجای لا کے ہم ایک مقدار فر جو مابین سہ اور لر کے واقع ہو رکہینگی اور ح (فر) کے علامت سی یہہ دریافت کرینگے کہ قیمت سہ اور فر کے درمیان واقع ہی یا سہ اور فر کے بیچ مین واقع ہی اب اسی عمل کو جاری رکہین جب تک کہ قیمت کے قدر عددی تقریباً ہم کو حسب خواہ حاصل ہو ہر عمل مین جس بُون کے درمیان قیمت واقع ہوگی اوسکی تنصیف ہوتی جائینگے

جو عمل یہان ہم نے بیان کیا اوسمین مشقت شاقہ اوٹہانی پڑتی ہی اور بڑا طول طویل عمل کرنا پڑتا ہے اسلئے ترکیبین ایجاد ہوئین ہین جنسی کہ عمل مختصر ہوجاتا ہی اونمین سی اول ہم لاگرانشز کی ترکیب بیان کرتے ہین

(۲۱۲) فرض کرو کہ ح لا = ۰ مساوات ہی جسکی نسبت ہم کو یہہ معلوم ہی کہ اوسکی صرف ایک قیمت دو مثبت صحاح متصلہ ا اور ا + ا کی درمیان واقع ہی لا = ا + $\frac{1}{ی}$ کی رکہو اور لا کی اس قیمت کو مساوات مفروضہ مین مندرج کرو تو ح (ا + $\frac{1}{ی}$) = ۰ اب اگر اس مساوات کو کسری خالص کرین تو ایک مساوات ی کی اوسی درجہ کی حاصل ہوجائیگی جس درجہ کی مساوات لا کی تہی اسکو مح (ی) = ۰ کہو

تعبیر کردہ مساوات ی کی صرف ایک قیمت مثبت ہوگی کیونکہ اصل مساوات مین لا کی ایک قیمت
ا اور ا+۱ کی درمیان واقع ہی اب ہم صحاح متصلہ ۱ و ۲ و ۳ . . . کو مح (ی) مین بجای ی کے
رکھہ رکھہ کر یہہ دریافت کرین کہ وہ کونسی دو نتایج متصلہ ہین کہ جنکی علامتین مختلف ہین فرض کرو کہ یہہ
دو نتیجی ب اور ب + ۱ حاصل ہوئی جنکی درمیان ی واقع ہی ی = ب + $\frac{1}{ل}$ کی مقرر کرو اور
اوسکو بجای ی کی مندرج کرو تو مح (ب + $\frac{1}{ل}$) = ۰ تو موافق سابق کی یہان بہی ایک مساوات
حاصل ہوگی جسکی مقدار مجہول کی قیمت ایک ہی مثبت ہوگی اور ہم صحاح متصلہ س اور س + ۱ ایسی تحقیق
کر سکتی ہین جنکی درمیان قیمت ی کی واقع ہو

پس ی = س + $\frac{1}{ل}$ مقرر کرو اور علے ہذا القیاس

پس لا کی قیمت خاطر خواہ تقریباً اس کسر مسلسل کے صورت مین دریافت ہوجائیگی

$$لا = ا + \cfrac{1}{ب + \cfrac{1}{س + \dots}}$$

(۲۱۳) اب فرض کرو کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک سی زیادہ قیمتین درمیان صحاح ا اور ا+۱ کے واقع ہین تو ہم
سٹرم صاحب کی ضابطہ کی موافق یا بعض اور قیمتوں کے جدا جدا کرنے کے ترکیب سی یہہ ہم تحقیق
کر سکتی ہین کہ مساوات کی قیمتون کو جو ان دو صحاح متصلہ کی درمیان واقع ہین کس عدد مین
ضرب دین کہ جو حاصل ضرب ایسی حاصل ہون کہ وہ مختلف صحاح متصلہ کی درمیان واقع ہون
اب مساوات کی ہئیت بدل کر ایک اور ایسی مساوات پیدا کرو کہ اوسکی قیمتین مساوات مفروضہ
کی قیمتون کی اضعاف موافق اس عدد مشخص کی ہون یعنی اس مساوات کے قیمتین برابر مساوات مفروضہ
کی قیمتون اور اس عدد د کے حاصل ضرب کے ہون اور پہر اس بدلی ہوئی مساوات پر موافق دفعہ
گذشتہ کے عمل کرو

یا ہم دفعہ گذشتہ کی عمل تعبیر مساوات کی ہئیت بدلنے کی کام مین لائین اس حالت مین مساوات ی کی
ایک سی زیادہ مثبت قیمتین ہونگین پہر قیمت مین سب سے بڑی صحیح عدد کو ہم تلاش کرین
اور پہر جدا جدا حساب ی کی مختلف قیمتون کی لگائین یہہ بہی ہو سکتا ہی کہ مساوات ی کی

ایک سی زیادہ قیمتین خاص صحاح متصلہ کی درمیان واقع ہون تو مساوات ی سے اونکے اندر تمیز پیدا کرو اور پہر ہر یک قیمت کا حساب جاری رکہو اور یہی عمل کیی جاؤ

(۲۱۴) مساوات معلوم ح (لا) =۰ سی ج (ا + $\frac{1}{ی}$) =۰ کے حاصل کرو یعنی ح (لا) کو ن درجہ کا فرض کرکے یہہ حاصل کرو کہ

$$ج(ا) + \frac{1}{ی} حَ(ا) + \frac{1}{ی^2} \frac{حً(ا)}{۲} + \frac{1}{ی^3} \frac{ح^{۳}(ا)}{\lfloor ۳} + \cdots + \frac{1}{ی^ن} \frac{ح^ن(ا)}{\lfloor ن} = ۰$$

ی^ن مین ضرب دو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ی^ن ح(ا) + ی^{ن-۱} حَ(ا) + ی^{ن-۲} حً \frac{(ا)}{۲} + \cdots + \frac{ح^ن(ا)}{\lfloor ن} = ۰$$

پس مساوات ی کی بنائی کی واسطی عددی قیمتین ح (ا) اور حَ (ا) اور حً (ا) ... دریافت کرنی چاہئی اور ان عددی قیمتون کا حساب موافق دفعہ ۵ کی ہو سکتا ہی مگر دفعہ ۱۸۰ مین جو ہم نی بیان کیا ہی کہ ایسی حسابون کی کرنی کی ترکیب ہورنر صاحب کی ترکیب کے باب مین بیان ہوگی وہی یہان ہم بیان کرتی ہین اور یہی کیفیت مساوات ی کی بننی کی ہے

دفعات ۲۰۴ اور ۲۰۸ پر رجوع کرنی سی لاگرانز کی ترکیب تقرب اسطرح بیان ہو سکتی ہے کہ فرض کرو ایک قیمت مساوات مفروضہ کی ا اور ا + ۱ کی درمیان واقع ہوتی ہی مساوات کی قیمتین بقدر ا کے گہٹاؤ اور پہر مساوات متکافیہ اوسکی بناؤ اور اس اخر مساوات کی ایک قیمت ب اور ب + ۱ کے درمیان دریافت کرو اور قیمتون کو بقدر ب کی گہٹاؤ اور مساوات متکافیہ بناؤ اور پہر اس اخر مساوات کی قیمت س اور س + ۱ کی درمیان تحقیق کرو اور قیمتون کو بقدر س کے گہٹاؤ اور مساوات متکافیہ بناؤ اور اسی طرح عمل کئی جاؤ تو یہہ کسر مسلسل

$$ا + \cfrac{1}{ب + \cfrac{1}{س + \cdots}}$$

اصل مساوات کی ایک قیمت ہوگی

(۲۱۵) مثال $لا^{۳} - ۲ لا - ۵ = ۰$

دفعہ ۸۰ اکے موافق مساوات کی ایک اصلی قیمت ہی اور بموجب دفعہ ۲۰ کی یہہ قیمت مثبت مقدار ہوگی

اور امتحان سے معلوم ہوتا ہے کہ وہ ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہے

فرض کرو کہ لا = ۲ + ۱/ی تو

ح (۲) = ۲^۳ − ۲×۲ − ۵ = −۱

حَ (۲) = ۳×۲^۲ − ۲ = ۱۰

۱/۲ حً (۲) = ۳×۲ = ۶

پس مساوات ی کی −ی^۳ + ۱۰ی^۲ + ۶ی + ۱ = ۰ یعنی

ی^۳ − ۱۰ی^۲ − ۶ی − ۱ = ۰ اب اسکو م (ی) = ۰ کہو

یہاں ی = ۱۰ کے م (ی) کو منفی اور ی = ۱۱ م (ی) کو مثبت بناتا ہی اسواسطے قیمت مطلوب ی کی ۱۰ اور ۱۱ کے درمیان واقع ہوگی ی = ۱۰ + ۱/ے سکے فرض کرو تو

م (۱۰) = ۱۰^۳ − ۱۰×۱۰^۲ − ۶×۱۰ − ۱ = −۶۱

مَ (۱۰) = ۳×۱۰^۲ − ۲۰×۱۰ − ۶ = ۹۴

۱/۲ مً (۱۰) = ۳×۱۰ − ۱۰ = ۲۰

اور مساوات ے کی −۶۱ے^۳ + ۹۴ے^۲ + ۲۰ے + ۱ = ۰ یعنی

۶۱ے^۳ − ۹۴ے^۲ − ۲۰ے − ۱ = ۰ اسکو ص (ے) = ۰ سے تعبیر کرو

یہاں ے = ۲ کے ص (ے) کو مثبت بناتا ہی پس قیمت مطلوب ے کی ۱ اور ۲ کی درمیان واقع ہے

فرض کرو کہ ے = ۱ + ۱/د تو

ص (۱) = ۶۱×۱^۳ − ۹۴×۱^۲ − ۲۰×۱ − ۱ = −۵۴

صَ (۱) = ۱۸۳×۱^۲ − ۱۸۸×۱ − ۲۰ = −۲۵

۱/۲ صً (۱) = ۱۸۳×۱ − ۹۴ = ۸۹

مساوات د کی −۵۴د^۳ − ۲۵د^۲ + ۸۹د + ۱ = ۰ یعنی

۵۴د^۳ + ۲۵د^۲ − ۸۹د − ۱ = ۰

اس مساوات سی معلوم ہوتا ہی کہ د کی قیمت ۱ اور ۲ کے درمیان واقع ہی سلسلی موافق سابق کی عمل کرو
اسی معلوم ہوا کہ لا = ۲ + ۱/(۱۰ + ۱/(۱ + ۱/(۱ + ...))) وغیرہ

پس کسر مسلسل کے مقربین ۲/۱ و ۲۱/۱۰ و ۲۳/۱۱ و ۴۴/۲۱ . . . مین جبر و مقابلہ کا چوالیسوان باب دیکھو
۴۴/۲۱ اور قیمت کی اصل قدرین فرق کم بہ نسبت ۱/(۲۱ (۲۱ + ۱۱)) یعنی کم بہ نسبت ۱/۶۷۲ کے ہے
ایک اور مثال کی واسطی یہہ مساوات لا^۳ − ۷ لا + ۷ = ۰ لو بموجب دفعہ ۱۰۸ اسکے مساوات کے
تمام اصلی قیمتین ہیں اور بموجب سٹرم صاحب کی ضابطہ کی یہہ ثابت ہو سکتا ہی کہ ایک قیمت درمیان ۱
اور ۱ ۱/۲ کی واقع ہی اور دوسری قیمت ۱ ۱/۲ اور ۲ کے درمیان اسیواسطی اگر لا = لا/۲ سے لکھین
اور مساوات لا کی بنائین تو مساوات کی ایک قیمت ۲ اور ۳ کے درمیان اور ایک قیمت ۳ اور ۴ کے
درمیان واقع ہوگی اور مساوات لا کی یہہ ہی (لا/۲)^۳ − ۷ لا/۲ + ۷ = ۰
یعنی لا^۳ − ۲۸ لا + ۵۶ = ۰
قیمت جو ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہے یہہ ہوگی کہ

۲ + ۱/(۱ + ۱/(۲ + ۱/(۲ + ...))) وغیرہما

اور قیمت جو ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہو

۳ + ۱/(۲ + ۱/(۱ + ...))) وغیرہما

ان قیمتوں مین سے ہر یک قیمت کے نصف کرنی سی اصل مساوات کی قیمتیں دریافت ہو جائیگی
یا ہم لاگرانشز کی ترکیب اصل مساوات پر کام مین لائین اور مساوات کی ہیئت کو ابتداءً متبدل نہ کرین
فرض کرو کہ لا = ۱ + ۱/ی تو (۱ + ۱/ی)^۳ − ۷ (۱ + ۱/ی) + ۷ = ۰ اس سے یہہ حاصل ہوگا کہ
ی^۳ − ۴ ی^۲ + ۳ ی + ۱ = ۰ اسکو ح (ی) = ۰ سے تعبیر کرو
یہان ح (۱) مثبت ہی اور ح (۲) منفی اور ح (۳) مثبت ہی پس ایک قیمت مثبت ی کی ۱ اور ۲ کے

درمیان اور دوسرے قیمت ۲ اور ۳ کی درمیان واقع ہوگی تو ء = ۱ + $\frac{1}{ی}$
اول قیمت کو تقریباً معلوم کرنی کی واسطی اور ء = ۲ + $\frac{1}{ی}$ دوسری قیمت کو تقریباً
دریافت کرنے کے واسطی فرض کرو

مساوات لا^{۳} − ۷ لا + ۷ = ۰ کی ایک منفی قیمت ہی اوسکو اسطرح دریافت کرسکتی ہین کہ لا کو − لا کر
بدل دو اور مساوات محصلہ کی قیمت کا حساب لگاؤ یعنی مساوات

(− لا)^{۳} − ۷ (− لا) + ۷ = ۰ کا

چونکہ مساوات لا^{۳} − ۷ لا + ۷ = ۰ کی تینون قیمتون کا مجموعہ صفر ہے تو جب دو قیمتون
کا حساب تقریباً ہو جائیگا تو تیسری قیمت کا حساب بہی تقریباً معلوم ہو جائیگا

(۲۱۶) اگر لاگرانشز کی ترکیب کے اندر ہم کو ایسی مساوات حاصل ہو کہ اوسکی قیمت ایک صحیح عدد ہو
تو حل مساوات کی ہم کو ایک قیمت کسر مسلسل محدود مین دریافت ہوگی یعنی ہم کو قیمت مکسور
محدود ناطق حاصل ہوگی لیکن اگر پہلی مساوات مفروضہ کی تمام قیمتین محدود اور ناطق مکسور
یا صحیح تحقیق کرلی ہین اور اونکی موافق اجزاء ضربی مساوات سی ساقط کرلی ہوتی تو یہہ
بات ہرگز نہ واقع ہوگی

(۲۱۷) لاگرانشز کی ترکیب مین اس بات کا واقع ہونا ممکن ہی کہ ہم کو ایسی مساوات حاصل ہو کہ وہ کسی
مساوات ماقبل سی بالکل مطابقت رکہتی ہو تو اس حالت مین خارج قسمت کسر مسلسل کے مقرر واقع ہونگے
اور اس سبب سی کسر مسلسل ایک کسر مکرر یا مدورہ بنجائیگی اور اوسکی قیمت مساوات درجہ دوم
کے حل کرنے سے معلوم ہوگی جبر مقابلہ کا ۴۵ باب دیکہو

اس مساوات درجہ دوم کی قیمتون مین درجہ دوم کا اصم ملتف ہوگا اور بموجب دفعہ ۴۴ کی اس
مساوات کی دونو قیمتین مساوات مفروضہ کی بہے دو قیمتین ہونگین

(۲۱۸) دفعہ ۲۱۵ مین جس عمل کو تمثیلاً مساوات لا^{۳} − ۷ لا + ۷ = ۰ کی دوسرے ترکیب کے اندر
لکہا ہی اوسکو ہم یہان علی العموم لکہتے ہین

ہمارا بڑا مطلب ذہن مین یہہ ہی کہ جب مساوات مفروضہ کی ایک سی زیادہ قیمتین درمیان صحاح متصلہ کی واقع ہون تو لاگرانشز کی ترکیب کو عمل مین لائین فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ کے مساوات مفروضہ ہو

اب جملی مستعان ح۱ (لا) اور ح۲ (لا) اور ح۳ (لا) ... سٹرم صاحب کے ضابطہ حاصل کرو اور وہان ٹہر جاؤ جہان ایسا مستعان جملہ حاصل ہو جاوے کہ وہ لا کی سب قیمتون کی واسطے مثبت ہو دفعہ ۱۹۹ دیکہو فرض کرو کہ ایک سی زیادہ قیمتین مساوات مفروضہ کی صحاح متصلہ ا اور ا + ۱ کی درمیان واقع ہین لا کی جگہ ا + $\frac{1}{ی}$ جملون ح (لا) اور ح۱ (لا) اور ح۲ (لا) ... مین رکہو اور جو اونکی صورت ہو اونکو ح (ی) و ح۱ (ی) و ح۲ (ی) ... سی تعبیر کرو اگر جملون کے دوسرے سلسلہ مین متواتر کوئی سی ایسی دو عدد ب اور ب + ۱ رکہین تو دونو صورتون مین جو تغیرات علامت ہونگی اونکا تفاوت مساوات ح (ی) = ۰ کی تعداد اون قیمتون کی ہوگی جو ب اور ب + ۱ کی درمیان واقع ہون وجہ اسکی یہہ ہی کہ ح (ی) اور ح۱ (ی) اور ح۲ (ی) ... مین جو ب اور ب + ۱ کی مندرج کرنی سی نتایج حاصل ہوتی ہین وہ وہی ہوتے ہین جو سلسلہ ح (لا) اور ح۱ (لا) و ح۲ (لا) ... مین جداگانہ ا + $\frac{1}{ب}$ اور ا + $\frac{1}{ب+۱}$ کے مندرج کرنی سی حاصل ہوتی ہین اسواسطی تغیرات علامت کی تعداد ون کا تفاوت برابر مساوات ح (لا) = ۰ کی تعداد اون قیمتون کی ہوگا کہ جو ا + $\frac{1}{ب}$ اور ا + $\frac{1}{ب+۱}$ کی درمیان واقع ہون یعنی مساوات ح (ی) = ۰ کی تعداد قیمتون کی جو ب اور ب + ۱ کی درمیان واقع ہون

پس اگر ہم کو یہہ دریافت ہوا کہ ی کی ایک قیمت سی زیادہ قیمتین درمیان صحاح متصلہ ب اور ب + ۱ کے واقع ہوئین ی کی جگہ ب + $\frac{1}{ی}$ سلسلہ ح (ی) اور ح۱ (ی) اور ح۲ (ی) ... مین اور ی کی جگہ دو متواتر صحاح متصلہ کی رکہنی سی ہم کو یہہ دریافت ہوگا کہ ی کی ایک سی زیادہ قیمتین دو صحاح متصلہ کے درمیان واقع ہین یا نہین

اسی طرح عمل کئی جاینگی جب تک کہ ہم کو ایسی مساوات حاصل ہوگی کہ جسکی ایک ہی قیمت درمیان دو صحاح متصلہ

کے واقع ہوں اور جب یہہ حاصل ہوجاے تو سٹرم صاحب کی ضابطہ کے جملوں کی احتیاج نہین ہوگی
اور بموجب دفعہ ۲۱۲ کے اس خاص قیمت کا حساب ہوجاویگا

پس اسطرح قیمتوں کو جدا جدا کرسکتی ہین اور اوسکا حساب لگاسکتی ہین اور اونمین سے کسی کو نہین چہوڑتے
اب اگر ہم کو ح (ا) و ح۱ (ی) ح۲ (ی) ۰۰۰ کی قیمتین دریافت کرنی منظور نہ ہون
بلکہ اونکی علامتین دریافت کرنی مطلوب ہون تو ہم سب صورتون مین ان جملون کو ی کی ایسی
قوتون مین ضرب دیسکتی ہین کہ اونکو کسرون سی خالص کردین اسواسطی کہ ی مثبت مقدار ہی
فرض کی گئی ہی ہر یک قوت اوسکی مثبت ہی مثلاً بجای ح (ی) کی یعنی بجاے ح (ا + $\frac{1}{ی}$) کے
ہم یہہ لکھین کہ

$$ی^ن ح (ا) + ی^{ن-۱} (ا) + \frac{ی^{ن-۲}}{۲} ح'' (ا) + \cdots + \frac{۱}{\lfloor ن} ح^ن (ا)$$

اور ح (لا) کو ن درجہ کا فرض کرلین

سترہوان باب

نیوٹن صاحب کی ترکیب تقرب اور اوسپر فوریر کا ضمیمہ

(۲۱۹) اب ہم ترکیب تقرب نیوٹن صاحب کی لکہتی ہین جسسی قیمت مساوات کی قدر عددی کا
حساب تقریباً ہوتا ہے

فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ مساوات ہی اور اوسکی ایک قیمت خاص حدود سہ اور صہ کی درمیان
واقع ہی اور ان حدون مین فرق بقدر ایک چہوٹی کسر کے ہی فرض کرو کہ س ایک ایسی مقدار
سہ اور صہ کی درمیان ہی کہ وہ قیمت مطلوب سی تقرب اولین رکہتی ہی اور س + صہ
ٹہیک قیمت ہی صہ ایک چہوٹی سی کسر ہی جسکا تشخیص کرنا منظور ہے

پس ح (س + صہ) = ۰ یعنی بموجب دفعہ ۱۰ کے

$$ح (س) + صہ ح' (س) + \frac{صہ^۲}{۱ \times ۲} ح'' (س) + \frac{صہ^۳}{\lfloor ۳} ح''' (س) + \cdots + \frac{صہ^ن}{\lfloor ن} ح^ن (س) = ۰$$

اب چونکہ صہ ایک چہوٹی سی کسر فرض کی گئی ہی تو صہ۲ اور صہ۳ ۰۰۰ بمقابلہ صہ کے

نہایت چھوٹی ہوگی پس اگر دوسری قوت اور اوسی بڑی قوتون کو اوپر کی مساوات مین ساقط کردین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ح (س) + ھ ح َ (س) = ۰

پس ھ = − ح (س) / ح َ (س)

تو یہہ فرض کرکے کہ ہم کو اسطرح یہہ قیمت ھ کی تقریباً دریافت ہوئی ہی س − ح (س) / ح َ (س) ایک تقرب جدید مساوات مفروضہ کا حاصل ہوا اس تقرب جدید کو س ۱ سی تعبیر کرو تو موافق سابق کی عمل کرنی سی س ۱ − ح (س ۱) / ح َ (س ۲) ایک اور تقرب جدید حاصل ہوگا اور علی ہذا القیاس

اب ہم اون شرائط کا امتحان کما حقہ کرتی ہین جنکی موافق یہہ ترکیب بغیر کسی خطا اور نقص کی استعمال مین آسکی اور ایسی امتحان کا ضروری ہونا ظاہر ہی کیونکہ اگر ح َ (س) بمقابلہ ح (س) کی چھوٹا ہو تو قیمت تقریبی ھ کی ایک چھوٹی کسر نہین ہوگی اور چھوٹی کسر ہونا اوسکا لوازمات سے ہے

(۲۲۰) ایک مساوات پر ہم نیوٹن صاحب کی ترکیب تقرب کا امتحان کرتی ہین اور یہہ مساوات وہی ہی جو خود نیوٹن صاحب نی منتخب کی ہی یعنی لا۳ − ۲ لا − ۵ = ۰ کو ح (لا) = ۰ سے تعبیر کرو یہان لا = ۲ کے ح (لا) کو منفی اور لا = ۳ کے ح (لا) کو مثبت بناتا ہے اسسے معلوم ہوا کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت ۲ اور ۳ کی درمیان واقع ہی اور لا = ۲ ½ کے ح (لا) کو مثبت بناتا ہی تو قیمت درمیان ۲ اور ۲ ½ کی واقع ہوگی اور لا = ۲٫۱ بھی ح (لا) کو مثبت بناتا ہی تو قیمت ۲٫۱ سی فرق بقدر ۰٫۱ کی بھی نہین رکھتی پس فرض کرو کہ س = ۲٫۱ تو

س ۱ = س − ح (س) / ح َ (س) = س − (س۳ − ۲ س − ۵) / (۳ س۲ − ۲)

= ۲٫۱ − ۰٫۶۱ / ۱۱٫۲۳ = ۲٫۱ − ۰٫۰۰۵۴ تقریباً

پس س ۱ = ۲٫۰۹۴۶

پس ایک اور تقرب جدید کے لئے یہہ حاصل ہوگا کہ

$$س_۱ - \frac{ح(س_۱)}{ح'(س_۱)} = س - ۲ - ۰۰۰۰، ۴۸۵ \text{ تقریباً}$$

$$= ۲،۰۹۴۵۵۱۴۸$$

(۲۲۱) یہہ عمل نظریات مین آسان ہی اور عملیات مین مشکل نہین ہی مگر اوسمین چند احتیاطین ضرور ہین تاکہ کامیابی کا اوسمین یقین ہو اب ہم ان احتیاطون کا بیان کرتے ہین فرض کرو کہ س قدر تقریبی مساوات کی قیمت کی ہی اور $س_۱ = س - \frac{ح(س)}{ح'(س)}$ اب ہم کو یہہ یقین بغیر تحقیقات کماحقہ کی نہین ہو سکتا کہ

کہ $س_۱$ بہ نسبت س کی اصل قیمت سی اقرب ہی مثال گذشتہ مین اول ہم نی یہہ تحقیق کیا کہ ایک قیمت ۲۱ اور ۲،۲ کے درمیان واقع ہی اور پہر یہہ فرض کیا کہ ۲،۱ تقرب اولین ہے اور اوسی ایک تقرب جدید ۲،۰۹۴۶ استخراج کیا لیکن یہہ ہم کو تحقیق نہین ہے کہ ۲،۰۹۴۶ بہ نسبت ۲،۱ کی اصل قیمت سی اقرب ہی لیکن اگر بجای لا کی ۲،۱ کے رکہو تو ح (لا) مثبت ہوتا ہی پس قیمت مطلوب ۲۱ اور ۲،۱ کے درمیان واقع ہے اور اسی ہم کو معلوم ہوا کہ ۲،۰۹۴۶ بہ نسبت ۲،۲ کی اصل قیمت سی قریب تر ہی لیکن اب بہی ہم کو یہہ نہین معلوم کہ ۲،۰۹۴۶ بہ نسبت ۲،۱ کی اصل قیمت سی زیادہ قریب ہی اگر ہم ۲،۰۹۴۶ کو ح (لا) مین رکہین تو ح (لا) مثبت دریافت ہوگا تو اسی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ قیمت ۲،۰۹۴۶ اور ۲ کے درمیان واقع ہوتا ہی پس ۲،۰۹۴۶ بہ نسبت ۲،۱ کے زیادہ قریب اصل قیمت سی ہے

(۲۲۲) فوریر صاحب نی ایک قاعدہ ایسا لکہا ہی کہ اوسکی موافق عمل کرنے سی یہہ مشقت بار بار امتحان کرنی کی نہین پڑتی جیسی کہ اوپر کی مثال مین پڑی تہی اور جب بعض شرائط پوری ہو جاتی ہین تو یہہ نیوٹن صاحب کی ترکیب اس قاعدہ سی مستند ہو جاتی ہے

نیوٹن صاحب کی ترکیب کا ضمیمہ فوریر کا جملہ معلوم کی اول جملہ مشتقہ کی ایک خاصیت پر موقوف ہے جسکو ہم ثابت کرتے ہین

(۲۲۳) اگر ا اور ب دو مقداریں ہوں تو کوئی مقدار درمیان ا اور ب کی ایسی ضرور ہوگی کہ

ح (ب) - ح (ا) = (ب - ا) حَ (لر)

اسواسطی کہ فرض ح (لا) بتعبیر ح (لا) - ح (ا) - $\frac{لا - ا}{ب - ا}$ [ح (ب) - ح (ا)] کو کرتا ہے

تو لا = ا کے ہونی سی یا لا = ب کے ہونے سی ح (لا) معدوم ہوتا ہے اسیواسطی

بموجب دفعہ ۲۰۲ کی مساوات حَ (لا) = ۰ کی قیمت درمیان ا اور ب کی ضرور ہوگی اور

حَ (لا) = حَ (لا) - $\frac{ح (ب) - ح (ا)}{ب - ا}$ اسی معلوم ہوا کہ کوئی مقدار لر درمیان

ا اور ب کی ضرور ایسی ہوگی کہ حَ (لر) - $\frac{ح (ب) - ح (ا)}{ب - ا}$ = ۰

اسیواسطی ح (ب) - ح (ا) = (ب - ا) حَ (لر)

(۲۲۴) فرض کرو کہ ب بڑا ا سی ہی تو ح (ب) جبر مقابلہ کی اعتبار سی بڑا ح (ا) سی ہوگا

اگر حَ (لر) مثبت ہی اور چھوٹا ح (ا) سے ہوگا اگر حَ (لر) منفی ہے

اگر حَ (لا) مثبت ہی درمیان لا = ا اور لا = ب کے ہو تو حَ (لر) ضرور مثبت ہوگا

اور اگر حَ (لا) منفی درمیان لا = ا اور لا = ب کی ہو تو حَ (لر) ضرور منفی ہوگا

پس اسی یہہ نتیجہ پیدا ہوا کہ اگر ح (لا) کسی بون کے درمیان استقلال کی ساتھہ مثبت ہو

تو ح (لا) اوس بون کی درمیان لا کی ساتھہ بڑہیگا اور اگر حَ (لا) استقلالا منفی ہو

تو ح (لا) اوس بون کی درمیان لا کی ساتھہ گہٹیگا اس کمی اور زیادتی سے مراد

ہماری جبر مقابلہ کی زیادتی اور کمی سی ہی اب ہم اپنی نتیجہ کو اسطرح بیان کیا کرتے ہیں

کہ اگر حَ (لا) کی کسی بون کی درمیان ایک ہی علامت ہو اور ح (لا) کی وہی علامت ہو جو ح (لا) کی ہے

تو جیسا لا اوس بون کی درمیان بڑھیگا ایسا ہی ح (لا) تعداداً بڑہیگا

اور اگر ح (لا) کی علامت مخالف حَ (لا) کے علامت کے ہو تو

جیسا لا اول بون کے درمیان گہٹیگا ایسا ہی ح (لا) گہٹیگا

(۲۲۵) اب ہم فوریر کے قاعدہ کو بیان کرتی ہیں اور ثابت کرتی ہیں فرض کرو کہ ح (لا) = مساوات ہو

جسکی صرف ایک ہی قیمت درمیان سہ اور صہ کی ہو اور فرض کرو کہ حَ (لا) = ۰ سے کوئی قیمت درمیان سہ اور صہ کی نہین ہی اور حً (لا) = ۰ کی بہی کوئی قیمت سہ اور صہ کے مابین نہین ہی تو اس حالت مین نیوٹن کی ترکیب تقریب ضرور کامیابی کے ساتہہ چلیگی اگر اوسکا آغاز وہان سی کرین جہان ح (لا) اور حً (لا) کی ایک ہی علامت ہو اور پہر آگے اوسکو جاری کرین

ہماری فرضون سی یہہ استخراج ہوتا ہی کہ ح (لا) علامت کو صرف ایک دفعہ سہ اور صہ کے درمیان بدلتا ہی اور حَ (لا) اور حً (لا) اپنی علامت سہ اور صہ کے درمیان نہین بدلتی ہم صہ ـ سہ کو مثبت فرض کرینگے

(۱) فرض کرو کہ ح (لا) اور حً (لا) کی جب لا = سہ کے ہو ایک ہی علامت ہے یہہ تقریب اولین فرض کرو تو نیوٹن کے ترکیب کے موافق تقریب ثانی سہ ـ ح (سہ) / حَ (سہ) ہی اور فرض کرو کہ سہ + صہ قیمت کی بالکل صحیح قدر ہے تو

ح (سہ + صہ) = ۰ اب بموجب دفعہ ۲۲۳ کے ہم کو یہہ حاصل ہے کہ

ح (سہ + صہ) ـ ح (سہ) = صہ حَ (لر) جہین لر درمیان سہ اور سہ + صہ کے واقع ہی پس صہ = ـ ح (سہ) / حَ (لر) اور ٹہیک قدر قیمت کی سہ ـ ح (سہ) / حَ (لر) ہے پس ہم کو یہہ ثابت کرنا رہا کہ سہ ـ ح (سہ) / حَ (سہ) بہ نسبت سہ کے اصلی قیمت سے زیادہ قریب ہی چونکہ صہ ضرور ایک مثبت مقدار ہی تو ح (سہ) اور حَ (لر) کی مختلف علامتین ہین اور ح (سہ) کی وہی علامت ہی جو حً (سہ) کی علامت ہی اور اسیواسطی حَ (لر) اور حً (سہ) مختلف العلامت ہین اسی معلوم ہوا کہ حَ (لا) تعداداً ایسا کم ہوتا ہے جیسا لا درمیان سہ اور صہ کے زیادہ ہوتا ہی پس حَ (لر) تعداداً کم حَ (سہ) سی ہوا اسیواسطی ـ ح (سہ) / حَ (سہ) ایک مثبت مقدار ہے جو تعداداً کم بہ نسبت مقدار ـ ح (سہ) / حَ (لر) کے ہی اسی ثابت ہوتا ہے کہ نیوٹن کا تقریب ثانی

قیمت حقیقی کی قدر کے زیادہ قریب بہ نسبت تقرب اولین کے ہے

فرض کرو سہ۱ = سہ − ح (سہ) / حَ (سہ) تو ح (سہ۱) اور حً (سہ۱) کی ایک ہی علامت ہے

اور تقریب سہ۱ سے جاری ہوتا ہے

(۲) فرض کرو کہ ح (لا) اور حً (لا) کی جب لا = صہ کے ہو ایک ہی علامت ہے

صہ کو تقرب اولین فرض کرو تو نیوٹن صاحب کی ترکیب کے موافق تقرب ثانی صہ − ح (صہ) / حَ (صہ) ہوگا

فرض کرو کہ صہ + صصہ قیمت کی صحیح صحیح قدر ہی تو ح (صہ + صصہ) = ۰

اب بموجب دفعہ ۲۲۳ کے ح (صہ + صصہ) − ح (صہ) = صصہ حَ (لر) اسمیں لر درمیان

صہ اور صہ + صصہ کے واقع ہی پس صصہ = − ح (صہ) / حَ (لر) پس اب ہم کو یہہ ثابت کرنا رہا

کہ صہ − ح (صہ) / حَ (صہ) قیمت حقیقی کی زیادہ تر قریب بہ نسبت صہ کے ہی چونکہ صصہ ضرور

منفی ہی تو ح (صہ) اور حَ (لر) کی ایک ہی علامت ہی اور ح (صہ) کی وہی علامت ہے

جو حً (صہ) کی علامت ہی اور اسیواسطے حَ (لر) اور حً (صہ) کی ایک ہی علامت ہے

اسی معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۲۲۴ کے کہ حَ (لا) تعداداً ایسا ہی زیادہ ہوتا ہے جیسا کہ

لا درمیان سہ اور صہ کی زیادہ ہوتا ہی پس حَ (سر) تعداداً کم بہ نسبت حَ (صہ) کے ہوا

اسیواسطی ح (صہ) / حَ (صہ) ایک مثبت مقدار ہی اور تعداد چہوٹی بہ نسبت مثبت مقدار ح (صہ) / حَ (لر) کے ہی

اسی ثابت ہوتا ہی کہ نیوٹن صاحب کی ترکیب کے موافق تقرب ثانی حقیقی قیمت کے قدر کے

قریب تر بہ نسبت تقرب اولین کے ہے

فرض کرو کہ صہ۱ = صہ − ح (صہ) / حَ (صہ) تو ح (صہ۱) اور حً (صہ۱) کی ایک ہی علامت

ہی اور تقرب صہ۱ سے اگے جاری ہوگا

(۲۲۶) دفعہ گذشتہ سی بخوبی ثابت ہوگیا کہ فوریر نے جو شرائط لکہی ہیں وہ نیوٹن صاحب کی ترکیب تقرب

کی کامیابی کی لئی کافی ہیں جب یہہ شرائط پوری ہوجائیں اور اوس حد سی کہ جسکے موافق

ح (لا) اور حً (لا) کی ایک ہی علامت ہو تقرب شروع ہو کر جاری ہو تو قیمتیں متواترہ حاصل

ہو تکلین جسمیں سی ہر ایک قیمت کی اصل قدر تک متواتر بڑہتی ہی بشرطیکہ حد جسی کہ ہم چلی ہین چہوٹی
قیمت کی اصل قدر سی ہو اور گہٹتی ہی اگر حد مذکور بڑی قیمت کی اصل قدر سی ہو

اب ہم انحصار کے ساتہہ یہہ ثابت کرینگے کہ فوریر کی شرائط کا ہونا ضروری ہے

ایک قیمت مفروضہ س سی ہم چلین تو نیوٹن صاحب کا تقرب ثانی س − ح (س) / حَ (س) زیادہ کرنی سی صحیح کریگا
اور قیمت کی قدر حقیقی س − ح (س) / حَ (س) کے زیادہ کرنی سی حاصل ہوگی اسی ثابت ہوا کہ حً (لا) کے
استواری علامت ضروری تاکہ یہہ ہم کو تحقیق ہو کہ ح (س) اور حً (س) کی ایک ہی علامت ہے اگر
ان مقداروں کی ایک علامت نہ ہو تو صحت نیوٹنی کی علامت غلط ہوگی اور نیوٹن کا تقرب ثانی
قیمت کی اصلی قدر سی بہ نسبت تقرب اولین کے بڑا ہوا ہوگا

استواری علامت حً (لا) کی ضروری تاکہ اوسی یہہ تحقیق ہو کہ حَ (س) تعداداً کم بہ نسبت حَ (س) کے ہو
اگر یہہ صورت نہ ہو تو صحت نیوٹنی تعداداً بڑی بہ نسبت اصلی صحت کی ہوگی اور اسطرح صحت
کی ٹہیک علامت فرض کرنی سی قیمت کی حقیقی قدر درمیان نیوٹن کے تقرب اول اور دوم
کے درمیان واقع ہوگی اس حالت مین نیوٹن کا تقرب ثانی قریب تر قیمت کے حقیقی قدر سے کے
بہ نسبت تقرب اول کی ہو سکتا ہی مگر اوسکا ہونا کچہہ ضروری نہین

(۲۲۷) دفعہ ۲۲۰ کی مثال مین ثابت ہو سکتا ہی کہ مساوات ح (لا) = ۰ صرف ایک قیمت ۱ اور ۱٫۲
کے درمیان واقع ہی اور مساوات حَ (لا) = ۰ اور حً (لا) = ۰ کی کوئی قیمت ان حدود کی درمیان نہین
واقع ہوتی اور جب لا = ۱٫۲ کے ہو تو ح (لا) اور حً (لا) دو نو مثبت ہین پس نیوٹن کی
ترکیب سے یقینی کامیابی حاصل ہوگی اگر اوسکا آغاز اور اجرا حد ۱٫۲ سے کرین

ایک اور مثال لا۳ − ۷ لا + ۷ = ۰ کی لو اسکو ح (لا) = ۰ سی تعبیر کرو امتحان سی یہہ بات ثابت
ہو سکتی ہی کہ مساوات کی ایک قیمت ۱٫۳ اور ۱٫۴ کے درمیان واقع ہے اور حَ (لا) = ۰
اور حً (لا) = ۰ کی قیمتین درمیان ان حدون کی نہین واقع ہین اور نیز
جب لا = ۱٫۴ تو ح (لا) اور حً (لا) دو نو مثبت ہین پس اگر حد ۱٫۴ اسی آغاز اور

اجرا کرین تو نیوٹن کی ترکیب تقرب سے کامیابی یقینی حاصل ہوگی

(۲۲۸) اب ہم یہہ بتلا ئینگے کہ سرعت تقرب کا تخمینہ کسطرح ہوتا ہی فرض کرو کہ عمل کی کسی مرتبہ مین ہم کو مخطے قیمت کی قدر تقریبی حاصل ہوئی ہی تو قیمت کی صحیح قدر س − $\frac{ح(س)}{ح'(ل)}$ ہے

پس عددی قدر غلطی کی اس مرتبہ مین $\frac{ح(س)}{ح'(ل)}$ ہی اسکو ر سے تعبیر کرو اور اسے مابعد عدد تقریبی س − $\frac{ح(س)}{ح'(س)}$ اور اب غلطی کی عددی قدر $\frac{ح(س)}{ح'(ل)}$ − $\frac{ح(س)}{ح'(س)}$

یعنی ر $\frac{ح'(س) - ح'(ل)}{ح'(س)}$ اور بموجب دفعہ ۲۲۳ کی ہم کو معلوم ہی کہ ح'(س) − ح'(ل) =

(س − ل) ح''(لو) اسمین لو درمیان س اور ل کے واقع ہوتا ہے پس غلطی

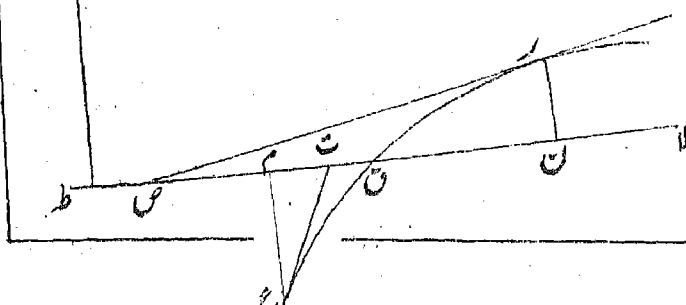
ر $\frac{(س - ل) ح''(لو)}{ح'(س)}$ ہی اب ل درمیان س اور قیمت کی حقیقی قدر کی درمیان واقع ہوتا ہی

پس س − ل چھوٹا ر سے ہوا پس غلطی کم بہ نسبت $ر^2 \frac{ح''(لو)}{ح'(س)}$ کے ہی اب فرض کرو کہ

ح''(لا) کی سب سے بڑی قیمت جو درمیان ان حدود کی ہو وہ سب سے چھوٹی قیمت ح'(لا) پر تقسیم کی جاوی اور خارج قسمت ق سے تعبیر ہو تو غلطی بدرجہ اولی کم ق $ر^2$ سے ہوگی

دفعہ ۲۲۳ کے مثال مین قیمت ۲ اور ۱٫۲ کے درمیان واقع ہوتی ہی

پس ق کی قیمت دریافت کرنی کی واسطی قیمت ۶ لا کو جب لا = ۱٫۲ کے ہو قیمت ۳ لا۲ − ۲ پر جب لا = ۲ کے تقسیم کرو تو ق = ۲۶ء۱ اور چونکہ ق تقریباً واحد کے برابر ہے تو ٹھیک مرتبے اعشاریہ تقرب مین قریب دوچند کے ہر دفعہ کے عمل مین ہونگے

(۲۲۹) جو خطوط منحنی کی مسائل مین اصول علم معقولات کو کام مین لاتا طالب علم جانتی ہین اسکو علم مناظرہ کے موافق نیوٹن کی ترکیب تقرب کے قاعدہ فوریر کی توضیح کرنی آسان ہے

فرض کرو کہ ع ق ایک خط منحنی کا حصہ مساوات ی = ح (لا) سے دریافت ہوتا ہے اور ی م اور ی ن ہم کو معلوم ہیں اور ی ق کی قیمت دریافت کرنی ہی یعنی وہ نقطہ دریافت کرنا ہی جہاں خط منحنی محور کو کاٹتا ہے

نقطہ ع پر ظاہر ہی کہ ح (لا) منفی ہی اگر ی محور ی کی مثبت سمت مقرر کی جائے اور ح″ (لا) بھی نقطہ ع پر منفی ہی کیونکہ خط منحنی ع پر محور لا کے لحاظ سے محدب ہے اور مماس ع ت کھینچو اور فرض کرو کہ ی م = سہ تو م ت = − ح (سہ) / ح′ (سہ) موافق علم حسابات کے ہوگا

پس م سی تقرب نیوطنی شروع ہوتا ہی اور ت کی طرف چلتا ہی اور چونکہ ت درمیان م اور ن کی واقع ہوتا ہی تو اسی ظاہر ہوتا ہی کہ ت سی اجرا ترکیب تقرب کا کامیابی کے ساتھ ہو سکتا ہے

نقطہ ر پر ح (لا) مثبت ہی اور ح″ (لا) منفی ہی مماس ر ص کھینچو اور تقرب نیوطنی ن سے شروع ہوتا ہی اور ص کی طرف جاری ہوتا ہی اور ص اور ن مختلف سمت میں ق کے واقع ہیں علاوہ برین یہہ یقینی نہیں ہی کہ ص ق چھوٹا ق ن سی ہی اور یہہ یقینی نہیں ہے کہ تقرب ص سی جاری ہوتا ہی پس تقرب ن سی شروع ہوتا ہے

طالب علم شکلیں مرتسم کر کی شرط ح′ (لا) اور ح″ (لا) کے حدود مذکور میں علامت نہ بدلنی کی توضیح کر سکتا ہے

اٹھارہواں باب ھورنر کی ترکیب

(۲۳۰) قیمت مساوات کی قدر تقریباً دریافت کرنی کی لئی اب ہم ترکیب تقرب وہ لکھی ہیں جسکو ھورنر صاحب نی ایجاد کیا ہے

فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ مساوات ہو تو ح (ط + لا) = ۰ وہ مساوات ہوگی جسکی قیمتیں اول مساوات کی قیمتوں سی بقدر ط کے کم ہونگیں

مساوات ح (لا + ط) کو تشریح کر کے لکھیں تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ح (ط) + لا ح' (ط) + لا² ح'' (ط) / ۲×۱ + لا³ ح''' (ط) / [۳ + ... لاⁿ حⁿ (ط) / [ن =

اب ہورنر صاحب کی ترکیب کا جزاعظم یہہ ہی کہ اس آخر مساوات کی مثال کو نظم اور خوش ترتیبی سے دریافت کیجیئے اور اس عمل کی فایدہ مندہونی کا ذکر ہم نی دفعات ۱۱ اور ۲۱۴ مین کیا ہے

(۲۳۱) تمثیلاً فرض کرو

ح (لا) = ا لا⁵ + ب لا⁴ + س لا³ + د لا² + ر لا + ف

تو ح (ط) = ا ط⁵ + ب ط⁴ + س ط³ + د ط² + ر ط + ف

ح' (ط) = ۵ ا ط⁴ + ۴ ب ط³ + ۳ س ط² + ۲ د ط + ر

۱/۲ ح'' (ط) = ۱۰ ا ط³ + ۶ ب ط² + ۳ س ط + د

۱/[۳ ح''' (ط) = ۱۰ ا ط² + ۴ ب ط + س

۱/[۴ ح'''' (ط) = ۵ ا ط + ب

۱/[۵ ح''''' (ط) = ا

(۱) ح (ط) کا حساب دفعہ ۵ کی طرح کرین تو

ا = ا

ا ط + ب = ع کے لکھو

ع ط + س = ا ط² + ب ط + س = ق کے لکھو

ق ط + د = ا ط³ + ب ط² + س ط + د = ی کے لکھو

ی ط + ر = ا ط⁴ + ب ط³ + س ط² + د ط + ر = ص کے لکھو

ص ط + ف = ا ط⁵ + ب ط⁴ + س ط³ + د ط² + ر ط + ف = ح (ط)

یہان ہر سطر اسطرح حاصل ہوتی ہی کہ ماقبل کی سطر کو ط مین ضرب دی اور حاصل ضرب پر مقادیر ب اور س اور د اور ر اور ف کو زیادہ کیا ہے

(۲) ح' (ط) کا حساب بہی اسطرح کرین جسطرح ح (ط) کا حساب کیا ہی اور ا و ع و ق و ی

اور ص کو بجای ا و ب و س اور د اور ر کے کام مین لائیں

ا = ا

ا ط + ع = ۲ ا ط + ب = سر کے لکھو

سر ط + ق = ۳ ا $ط^{۲}$ + ۲ ب ط + س = جر کے لکھو

جر ط + ی = ۴ ا $ط^{۳}$ + ۳ ب $ط^{۲}$ + ۲ س ط + د = سر کے لکھو

سر ط + ص = ۵ ا $ط^{۴}$ + ۴ ب $ط^{۳}$ + ۳ س $ط^{۲}$ + ۲ د ط + ر = ح′ ط

(۳) $\frac{۱}{۲}$ ح″ (ط) کا حساب بمثل ح (ط) کے کرو اور حروف ا اور بر و جر و سر کو کام مین لاؤ تو

ا = ا

ا ط + بر = ۳ ا ط + ب = شر کے لکھو

شر ط + جر = ۶ ا $ط^{۲}$ + ۳ ب ط + س = صر کے لکھو

صر ط + سر = ۱۰ ا $ط^{۳}$ + ۶ ب $ط^{۲}$ + ۳ س ط + د = $\frac{۱}{۲}$ ح″ (ط)

(۴) اسیطرح $\frac{۱}{۲.۳}$ ح‴ (ط) کا حساب کرو اور ا و شر و صر کو کام مین لاؤ

ا = ا

ا ط + شر = ۴ ا ط + ب = فر کے لکھو

فر ط + صر = ۱۰ ا $ط^{۲}$ + ۴ ب ط = $\frac{۱}{۲.۳}$ ح‴ (ط)

(۵) اب $\frac{۱}{۲.۳.۴}$ ح⁗ (ط) کا اسیطرح حساب کرسکتے ہین ا اور فر کو کام مین لاؤ

ا = ا

ا ط + فر = ۵ ا ط + ب = $\frac{۱}{۲.۳.۴}$ ح⁗ (ط)

(۶) اخر ا = $\frac{۱}{۲.۳.۴.۵}$ ح′′′′′ (ط)

اوپر کے عمل کو اس ترتیب سے لکھو تو نہایت آسانی ہوگی

ا	ب	س	د	ر	ف
ا	اط / ع	عط / ن	قط / ب	ماط / ص	صط / ح ط
	اط / ر	رط / حر	حرط / سر	سرط / ح′ (ط)	
	اط / شر	سرط / صر	صرط / ½ ح″ (ط)		
	اط / قر	قرط / ⅙ ح‴ (ط)			
	اط / ١⁄٢٤ ح⁗ (ط)				

ہر خط عرضی کے نیچے اوسی اوپر کے دو مقداروں کا حاصل جمع لکہا ہے

پس ہم نی ترکیب ہورنر کی عمل کی مساوات ح (ط + لا) = ۰ کی مثال بتائی کی جب وہ پانچوین درجہ کی ہو بتلادی خواہ مساوات کا درجہ کچہ ہی ہو عمل یہی ہوگا

(۲۳۲) مثلاً فرض کرو کہ ہم کو ایک مساوات معلوم ہی جسکی ایک قیمت ۳۰۰ اور ۴۰۰ کی درمیان واقع ہے ایک دوسری مساوات بناؤ جسکی قیمتین بہ نسبت اول مساوات کی بقدر ۳۰۰ کی کم ہون تو دوسری مساوات کی قیمتین ۰ اور ۱۰۰ کے درمیان واقع ہونگین اور امتحان سی یہہ دریافت کرو کہ ۱۰۰ کا کون بڑی سی بڑا اضعاف اس قیمت مین شامل ہی فرض کرو کہ وہ ۷۰ ہے اب تیسری مساوات بناؤ جسکی قیمت دوسری مساوات سی بقدر ۷۰ کے کم ہو تو اس تیسری مساوات کی قیمتین ۰ اور ۱۰ کے درمیان واقع ہونگین اب امتحان سی یہہ دریافت کرو کہ قیمت مین کون بڑی سی بڑا صحیح عدد شامل ہی فرض کرو کہ وہ ۲ ہے اب چوتہی مساوات بناؤ جسکی قیمت تیسری مساوات سی بقدر ۲ کے کم ہو تو اس چوتہی مساوات کی قیمت ۰ اور ۱ کے درمیان واقع ہونگین اب امتحان سی یہہ دریافت کرو کہ کتنی دسوین حصہ زیادہ سی زیادہ اس قیمت مین شامل ہین فرض کرو کہ وہ آٹھہ دسوین ہین تو اس پانچوین مساوات کی قیمت ۰ اور ا ک کے

درمیان واقع ہی اور امتحان سی دریافت کرو کہ زیادہ سی زیادہ کتنی سوین حصہ اس قیمت
مین شامل ہین فرض کرو کہ ستاسوین حصی ہین
اول فرض کرو کہ ۰۷، قیمت پانچوین مساوات کی ہی تو اسی یہہ معلوم ہوتا ہے کہ
۸۷، ۲۷۳ ٹہیک قیمت اول مساوات کی ہے
دوم فرض کرو کہ ۰۷، ٹہیک قیمت مساوات پنجم کی نہین ہے تو اسی یہہ مستنبط ہوگا کہ ایک مساوات ہے
جسکی قیمتین مساوات اول کی قیمتون سی بقدر ۸۷، ۲۷۳ کے چہوٹی ہین اور اوسکی قیمت
۰ اور ۰۱، کے درمیان واقع ہی پس مساوات اول کی قیمت ۸۷، ۲۷۳ اور ۸۸، ۲۷۳
کے درمیان واقع ہے
پس اسی معلوم ہوتا ہی کہ ایک سلسلہ اوس قسم کی قیمتون کا جسکا ذکر ۲۳۱ مین ہوا اسطرح حاصل ہوتا ہی اور
حقیقی قیمت یا تقریبی قیمت خاطر خواہ دریافت ہوجاتی ہے
(۲۳۳) ہم نی دفعہ گذشتہ مین یہہ بیان کیا ہی کہ بعض اعداد امتحان سی دریافت ہوتی ہین
اب ہم یہان ایک طریقہ ان امتحانون کی ہدایت کی لئی بتلائینگے فرض کرو کہ ح (لا) = ۰
مساوات مفروضہ ہو اور ایک یا زیادہ عملون سی ہم نی ایک مساوات ایسی حاصل کی جسکی قیمتین
مساوات مفروضہ کی قیمتون سی بقدر س کی کم ہون یعنی یہہ فرض کرو کہ ہم مساوات
ح (س + لا) = ۰ کی حاصل کرین اور فرض کرو کہ اس مساوات کی ایک قیمت چہوٹی سی ہے
تو اس مساوات کی ایک قیمت تقریبی ہوگی
پس اسی معلوم ہوا کہ موافق باب گذشتہ کی اکثر قیمت سی $س - \frac{ح(س)}{ح'(س)}$ اقرب ہوگا
پس $- \frac{ح(س)}{ح'(س)}$ اوس عدد کی قدر تقریباً ہوگی جسکو اجزاء عمل کے واسطی ہم تلاش کررہے ہے
(۲۳۴) مثال فرض کرو کہ ح (لا) = ۲ لا۳ - ۴۷۳ لا۲ - ۲۳۴ لا - ۱۷۱۱ اب امتحان سے
معلوم ہوتا ہی کہ ح (۲۰۰) منفی ہی اور ح (۳۰۰) مثبت ہی پس مساوات ح (لا) = ۰
کی ایک قیمت درمیان ۲۰۰ اور ۳۰۰ کے واقع ہی اب ہم وہ عمل کرتی ہین جسی قیمتون

قیمتوں میں سے ہر ایک قیمت بقدر ۲۰۰ کے کم ہو جاتی ہے

۲ — ۷۶۳ — ۲۳۴ — ۲۰۰)۷۱۱
۴۰۰ — ۱۴۶۰۰ — ۲۹۴۴۸۰۰
۷۳ — ۱۴۸۳۴ — ۲۹۴۷۵۱۱
۴۰۰ ۱۵۴۰۰
۳۲۷ ۵۰۵۴۴
۴۰۰
۷۲۷

اس سے معلوم ہوا کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتوں سے جس مساوات کی قیمتیں بقدر ۲۰۰ کی کم ہیں وہ یہہ ہے کہ

۲ لا^۳ + ۷۲۷ لا^۲ + ۵۰۵۴۴ لا − ۲۹۴۷۵۱۱ = ۰ پس

ح (۲۰۰) = − ۲۹۴۷۵۱۱ اور حَ (۲۰۰) = ۵۰۵۴۴

اس سے معلوم ہوا کہ ح (۲۰۰) / حَ (۲۰۰) زیادہ قریب بہ نسبت ۵۰ کی ہے پس اب مساوات کی قیمتوں میں سے ہر ایک قیمت کو بقدر ۵۰ کے کم کرتے ہیں

۷۲۷ ۵۰۵۴۴ ۵۰) ۲۹۴۷۵۱۱ −
۱۰۰ ۴۱۳۵۰ ۴۵۹۵۸۰۰
۸۲۷ ۹۱۹۱۴ ۱۶۲۸۲۸۹

اسطرح سے ہم کو ۵۰ بہت بڑا عدد حاصل ہوا اسواسطے ح (۲۵۰) = ۱۶۲۸۲۸۹ مثبت ہے اور ح (۲۰۰) منفی ہے پس قیمت چھوٹی ۲۵۰ سے ہوئی دفعہ ۲۲۳ کی ہدایت پر چلنے سے اگر ہم ایک بڑا عدد امتحان کی واسطے تجویز کرینگے اور خاص کر ابتدائے عمل میں تو یہہ ضرور ہوگا اسی طرح کی کیفیت عدد کی جذر نکالنے میں واقع ہوتی ہے کہ ہم ایک بڑا عدد جذر میں تجویز کرتے ہیں جس سے جذر نہیں نکلتا

اب ہم ۴۰ پر امتحان کرینگے

۲ ۷۲۷ ۵۰۵۴۴ ۲۹۴۷۵۱۱ −
۸۰ ۳۲۲۸۰ ۳۳۱۳۸۴۰
۸۰۷ ۸۲۸۲۴ ۳۴۶۳۲۹

پس ۴۰ بھی بہت بڑا ہے کیونکہ ح (۲۴۰) مثبت ہے

اب ہم ۲۳۰ پر امتحان کرتے ہیں

۲ ۷۲۷ ۵۰۵۶۶ -۲۹۶۷۵۱۱
۶۰ ۲۳۶۱۰ ۲۲۲۵۲۸۰
۷۸۷ ۷۴۱۶۶ -۷۴۲۲۳۱
۶۰ ۲۵۴۱۰
۸۴۷ ۹۹۵۸۶
۶۰
۹۰۷

پس ح (۲۳۰) = -۷۴۲۲۳۱ منفی مقدار ہی پس ۲۳۰ ایک مناسب عدد ہے
پس مساوات جسکی قیمتیں مساوات ح (لا) = ۰ کے قیمتوں سے بقدر ۲۳۰ کے کم ہیں
وہ یہہ ہے کہ ۲ لا^3 + ۹۰۷ لا^2 + ۹۹۵۸۶ لا - ۷۴۲۲۳۱ = ۰

یہاں حَ (۲۳۰) = ۹۹۵۶۶ پس $-\frac{ح(۲۳۰)}{حَ(۲۳۰)}$ = ۷ کے تقریباً
اب مساوات کی قیمتیں بقدر ۷ کے گھٹاتے ہیں

۲ ۹۰۷ ۹۹۵۸۶ -۷۴۲۲۳۱ (۷
۱۴ ۶۴۴۷ ۷۴۲۲۳۱
۹۲۱ ۱۰۶۰۳۳ ۰

اسی ثابت ہوتا ہے کہ ح (۲۳۷) = ۰ پس ۲۳۷ ایک قیمت اصل مساوات کی ہے
کل عمل کو اسطرح کیا کرتے ہیں

۲ -۴۷۳ -۲۳۴ -۷۱۱ (۲۳۷
۴۰۰ -۱۶۶۰۰ -۲۹۶۶۸۰۰
-۷۳ -۱۸۸۳۴ -۲۹۶۷۵۱۱ *
۴۰۰ ۹۵۴۰۰ ۲۲۲۵۲۸۰
۳۲۷ * ۵۰۵۶۶ * -۷۴۲۲۳۱ +
۴۰۰ ۲۳۶۱۰ ۷۴۲۲۳۱
۷۲۷ ۷۴۱۶۶
۶۰ ۲۵۴۱۰
۷۸۷ ۹۹۵۸۶ ۶
۶۰ ۶۴۴۷
۸۴۷ ۱۰۶۰۳۳
۶۰
۹۰۷ ۶
۱۴
۹۲۱

جہاں ن * کیا گیا ہے وہاں پہلا جز عمل کا ختم ہوتا ہے اور جہاں نشان ‡ ہے وہاں دوسرا جز عمل کا تمام ہوتا ہے

(۲۳۵) اب ہم مثال ایک ایسی مساوات کی لکھتے ہیں کہ جسکی قیمت ناطقہ محدود نہیں ہے فرض کرو کہ

ح (لا) = لا۳ − ۳ لا۲ − ۲ لا + ۵ امتحان سے یہہ معلوم ہوتا ہے کہ ح (۳) منفی اور

ح (۴) مثبت ہے پس مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت ۴ اور ۳ کے درمیان ہے

پس عمل اس قیمت کی تقرب کا تین مرتبہ کی اعشاریہ تک یہہ ہوگا

۱ − ۳	− ۲	۵	(۳٫۱۲۸
۳	۰	− ۶	
۰	− ۲	− ۱ *	
۳	۹	۰٫۷۶۱	
۳	۷ *	− ۰٫۲۳۹	
۳	۰٫۶۱	۰٫۱۶۷۱۲۸	
۶ *	۷٫۶۱	− ۰٫۰۷۱۸۷۲ ‡	
۰٫۱	۰٫۶۲	۰٫۰۶۸٫۲۷۳۱۵۲	
۶٫۱	۸٫۲۳ †	− ۰٫۰۰۳۵۹۸۸۴۸	
۶٫۲	۰٫۱۲۶۴		
۶٫۳ ‡	۸٫۳۵۶۴		
۰٫۰۲	۰٫۱۲۶۸		
۶٫۳۲	۸٫۴۸۳۲ ‡		
۰٫۰۲	۰٫۰۵۰۴۴		
۶٫۳۴	۸٫۵۳۳۴۱۴		
۰٫۰۲	۰٫۰۵۱۰۰۸		
۶٫۳۶ ‡	۸٫۵۸۵۱۵۲		
۰٫۰۰۸			
۶٫۳۶۸			
۰٫۰۰۸			
۶٫۳۷۶			
۰٫۰۰۸			
۶٫۳۸۴			

اب قیمت کے دوسرے ہندسہ کے دریافت کرنے کے واسطے − ۱/۶ ہم کو حاصل ہے

پس ۱ سب سے زیادہ قریب عدد امتحان کرنے کی لئے ہے اور قیمت کی تیسرے ہندسہ کے دریافت کرنے کی واسطے

$\frac{۲٫۳۹}{۸٫۲۳}$ − ہے پس ۰٫۰۲ سب سے زیادہ عدد قریب امتحان کے واسطے ہے

اور قیمت کی چوتھی ہندسہ کی دریافت کرنے کی واسطے − $\frac{۰٫۰۷۱۸۷۱}{۸٫۴۸۳۲}$ ہم کو حاصل ہوتا ہے

پس ۰٫۰۰۸ سب سے زیادہ قریب عدد امتحان کی واسطے ہے ان سب صورتوں میں جس عدد کو

بیان کیا ہے وہ درست بیٹھتا ہے

(۲۳۶) دفعہ گذشتہ مین جو مساوات لکھی ہی اوسکو دوسری مثال سمجھو اور اوسکی قیمت ۱۱ اور ۲ کے درمیان دریافت کرو

۱ ‏ ‏-۳
۱
-۲
۱
-۱
۱
۰۰ ✱
۲
۲
۲
۴
۲
۶۰۰
۱
۶۰۱
۱
۶۰۲
۱
۶۰۳۰
۶
۶۰۳۶
۶
۶۰۴۲
۶
۶۰۴۸

-۲
-۲
-۴
-۱
-۵۰۰ ✱
۴
-۴۹۶
۸
-۴۸۸۰۰۰۰ ✕
۶۰۱
-۴۸۷۹۳۹۹
۶۰۲
۴۸۷۸۷۹۷۰۰
۳۶۲۱۶
-۴۸۷۸۴۳۴۸۴
۳۶۲۵۲
-۴۸۷۸۷۲۳۲

۱۵۲۰۱۶) ۵
-۴
۱۰۰۰ ✱
-۹۹۶
۸۰۰۰۰۰۰
-۴۸۷۹۳۹۹
+۳۱۲۰۶۰۱۰۰۰
-۳۹۲۷۰۶۰۹۰۴
۱۹۳۵۴۰۰۹۶

اس دفعہ اور دفعہ ۲۳۵ کی ترتیب مین فرق اس بات سی پیدا ہوتا ہے کہ عمل مین یہہ اکثر دستور ہی کہ علامت عشاریہ کی ساقط اوسطرح کر دیتی ہین جسطرح کہ اعداد کی تقریبی جذر کی نکالنی مین قیمت مین جو جزو عشاریہ ہو اوسکی واسطی یہہ قاعدہ کافی ہی کہ جب تمام ہندسی صحیح عدد کے قیمت مین معلوم ہوجائین اور کسر اعشاریہ کے پیدا ہونے کی نوبت پہونچی تو دنان عمل کی اول خانہ مین دائین طرف ایک صفر لگاؤ اور عمل کے دوسرے خانہ مین دو صفر اور تیسرے خانہ مین تین صفر اور علی ہذا القیاس اگر ادخالی عمل کی تین سے

زائد ہوں اور پہر عمل ایک دفعہ کا اسطرح کرو کہ گویا سب ہی ہندسی قیمت کی اعداد صحاح ہی تہی اور پہر صفروں کا الحاق موافق سابق کی عمل میں لاؤ

اب اس بات پر غور کرو کہ قیمت میں جب ۲ نکل چکی بعد اوسکی جو ہندسہ مثل صحیح کی تقریباً تجویز ہوگا وہ $\frac{۸۰۰۰}{۴۸۸}$ ہی اور یہہ ایک سی کم ہی پس ایک صفر قیمت میں لگاؤ اور اول خانہ عمل میں ایک صفر اور دو اور زیادہ صفر دوسرے خانہ عمل میں اور تین اور زیادہ تیسرے میں الحاق کرو اور عمل موافق سابق کی کرو

یہہ امر ظاہر ہی کہ امثلہ گذشتہ میں اول خانہ میں عمل کا اختصار ہو سکتا تہا کیونکہ یہہ کافی تہا کہ جو نتائج عمل ہوں اونکو لکہیں اور درمیان کے عمل کو ذہن میں کریں مگر ہم نی صاف صاف سمجہانے کے واسطے کل عمل کی صورت مفصل لکہی ہی لیکن اوسکا اختصار نہیں کیا

(۲۳۷) جب قیمت میں بعض ہندسی نکل ائی تو عمل مختصر کی اعانت سے اور ہندسے قیمت کی دریافت ہوجاتے ہیں اس کی مثال مساوات لا۳ + ۳ لا۲ − ۲ لا − ۵ = ۰ کی مثبت قیمتوں کے دریافت کرنے میں دیتی ہیں قیمت میں پانچ مرتبی اعشاریہ کی جب تک ہم کو دریافت ہونگی عمل تمام اور کمال کرینگے

۱ ‏۳ ‏‏ −۲ ‏‏ −۵ (۱٫۳۳۰۰۵

۳	−۲	−۵
۱	۴	۲
۴	۲	−۳۰۰۰
۱	۵	۲۶۶۷
۵	۷۰۰	−۳۳۳۰۰۰
۱	۱۸۹	۳۳۲۳۳۷
۶۰	۸۸۹	−۶۶۳۰۰۰۰۰۰
۳	۱۹۸	۵۶۴۳۵۲۵۱۲۵
۶۳	۱۰۸۷۰۰	−۹۸۶۴۷۶۴۸۷۵
۳	۲۰۷۹	
۶۶	۱۱۰۷۷۹	
۳	۲۰۸۸	
۶۹۰	۱۱۲۸۶۷۰۰۰۰۰۰	
۳	۳۴۹۵۰۲۵	
۶۹۳	۱۱۲۸۷۰۴۹۵۰۲۵	
۳	۳۴۹۵۰۵۰	
۶۹۶	۱۱۲۸۷۳۹۹۰۰۷۵	
۳		
۶۹۹۰۰۰		

```
۶۹۹ ۰ ۰ ۵
        ۵
۶۹۹ ۰ ۱ ۰
        ۵
۶۹۹ ۰ ۱ ۵
```

اختصار عمل کا قاعدہ یہہ ہی کہ ہر دفعہ کی عمل مین ایک ہندسہ عمل کی اخر خانہ مین اول سی دور کرو مگر ایک اور اخر خانہ عمل مین سی دو ہندسی مگر دوا ور علی ہذا لقیاس

اب وہی مثال لیتی ہین جو اوپر بیان ہوئی اور اس مختصر قاعدہ کو عمل مین لاتی ہین

```
۱  ۶۹۹۰۱۵  ۱۱۲۸۷۳۹۹۰۰۷۵ ــ ۹۸۶۴۷۵۲۴۸۷۵(۱۷۳۳۰۰۵۸۷۳
           ۵۵۹۲۱           ۹۰۲۹۹۶۳۹۴۳۲
           ۱۱۲۸۷۴۵۴۹۲۹  *ــ ۸۳۴۷۸۸۵۴۴۳
           ۵۵۹۲۱        ــ  ۷۹۰۱۲۶۱۰۱۸
        *  ۱۱۲۸۷۵۱۰۸۵۰  ــ  ۴۴۶۶۲۴۴۲۵
           ۴۸۹              ۳۳۸۶۲۵۶۲۴
           ۱۱۲۸۷۵۱۵۷۴   ــ  ۱۰۷۹۹۸۸۰۱
           ۴۸۹          ــ
           ۱۱۲۸۷۵۲۰۶۳
           ۲
           ۱۱۲۸۷۵۲۰۸
           ۲
           ۱۱۸۷۵۲۱۰
```

اوس مقام پر جہان پورا عمل ختم ہوتا ہی ہندسہ اخری ۸ تجویز ہوا ہی اب ہم ۵ کو اخر خانہ عمل کے اغاز سے ساقط کرتی ہین الا ایک اور ۱۵ اخر خانہ عمل کے اغاز سی لقط کرتی ہین الا دو اول مرتبہ مین اجزا عمل کے ۶۹۹ کو ۸ مین ضرب دی اور حاصل ضرب کو عمل کی خانہ اخری مین لکھا حاصل ضرب ۵۵۹۲۱ سمجھا گیا ہی اسلئی کہ ۶۹۹۰۱ کو ۸ مین ضرب دی ہی اور اول ہندسہ کو الگ کر لیا ہی پس ۵۵۹۲۱ بہ نسبت اصل قیمت کے ۵۵۹۲۰ سی زیادہ قریب ہی پس ۵۵۹۲۱ کو ۸۷۳۹۹۰۰۷ ۱۱ میں زیادہ کرو

اکائی کی مرتبہ کا ہندسہ ہم نی ۹ لکھا ہی اسلئی کہ ہم نی پانچ کے ساقط کرنے کی رعایت رکھی ہی * سی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اول مرحلہ عمل مختصر کا یہان ختم ہوا ہی اب ۰ کو دوسری خانہ عمل سی ساقط کرو اور ۹ اول خانہ عمل سی تو اول خانہ عمل مین مختصر ہو کر ۶۹ رہ جائینگے

اب ہندسہ آخری قیمت کا ۷ ہی اور مرحلہ عمل کا وہان ختم ہوتا ہی جہان ہندسہ کو نشان ہے
اب ۳ کو دوسرے خانہ عمل مین سی ساقط کرد اور ۶۹ کو اول خانہ عمل مین سی تو اول خانہ عمل نابود
ہوجایگا مگر پہر بہی کچہہ اثر قیمت کی ہندسہ آخری ۳ پر کری گا اور جب ۶۹ کو ۳ مین ضرب دین
اور دو ہندسی ساقط کرین تو ۲ باقی رہینگے

اب دو خانہ عمل کی باقی رہی ہین اور باقی عمل کی بالکل مطابق تقسیم مختصر کی قاعدہ معمولی کی ہی
اور اوسی اٹہہ ہندسی اور قیمت مین مستنبط ہونگے

۱و۳۳۰۰۵۸۷۳۹۵۶۷۹۲۵ (	۱۰۷۹۹۸۸۰۱ –	۱۱۲۸۷۵۲۱و۰
	۱۰۱۵۸۷۶۸۹	
	۶۴۱۱۱۱۲ –	۱۱۲۸۷۵۲و۱
	۵۶۴۳۷۶۱	۱۱۲۸۷۵و۲
	۷۶۷۳۵۱ –	
	۶۷۷۲۵۱	۱۱۲۸۷و۵
	۹۰۱۰۰ –	
	۷۹۰۱۳	۱۱۲۸و۷
	۱۱۰۸۷ –	
	۱۰۱۵۸	۱۱۲و۸
	۹۲۹ –	
	۹۰۲	۱۱و۲
	۲۷ –	
	۲۲	۱و۱
	۵ –	

اس تقرب پر اعتبار آخر ہندسہ تک ہوسکتا ہی اور کم از کم درجہ اس اعتبار کا یہہ ہے کہ آخر ہندسہ صحیح ہو خاکر درین
اسواسطی کہ اگر کل عمل تمام و کمال کیا جاتا تو آخر خانہ عمل مین بہت سے ہندسی اون ہندسون
کی دائین طرف ہوتی جواب لکہی ہوئی ہین مگر وہ ہندسی جواب لکہی ہوئے ہین تو اوسکی مقامات
مین کچہہ تغیر نہین واقع ہوگا لیکن شاید تغیر ہو تو فقط اتنا ہوگا کہ بعض سطرون کے آخر ہندسہ مین
دوسری سطر کے آخر ہندسی سے بقدر ایک کے فرق رہے

(۲۳۸) دفعہ گذشتہ مین جو قیمت دریافت ہوئی ہی وہ مساوات $لا^۳ - ۳لا^۲ - ۲لا + ۵ = ۰$
منفی قیمت کی قدر عددی ہی پس اسی معلوم ہوا کہ دفعات ۲۳۵ اور ۲۳۶ مین جو قیمتین دریافت ہوئین

وہ دفعہ ۲۳۷ کے دریافت شدہ قیمتوں سی بقدر ۳ کے زیادہ ہون کیونکہ مساوات کی تینون قیمتین مع اپنی مناسب علامتون کی ملکر برابر ۳ کے ہین

اگر تینوں قیمتوں کو تقریباً دریافت کرکی جمع کرینگے تو اوسکا مجموعہ بھی تقریباً ۳ ہوگا طالب علم کو چاہی کہ وہ دو تقریبی مثبت قیمتون مین بہت سی مراتب اعشاریہ کی نکالی تاکہ ان دو قیمتون اور دفعہ ۲۳۷ سی جو قیمت دریافت ہوا دنکی مجموعہ مین تعلق صاف ثابت ہو

(۲۳۹) ہورنر صاحب کی ترکیب مین جو مشقت شاقہ اٹھانی پڑتی ہی اوسکی واسطی بہت سے مہندسین نی اپنی رائے دی ہی اون رائی مین ایک رائے ہم یہہ نقل کرتی ہین کہ چونکہ یہہ عمل ایسا ہے کہ جسکو اکثر آدمی نہین کرسکتی اسلئی اوسکا اختصار بھی کسی کام کا نہین ہی جتنی قاعدی اور مختصر بناتی کی بیان ہوئی ہین اون سب مین محاسب اوس ترکیب کی یکرنگی کو بھولتا ہے اور یہہ مختصر قاعدہ محاسب کے امداد نہین کرتی بلکہ اوس خود ترکیب ہی کو بھولاتی ہین

(۲۴۰) دفعہ ۲۳۱ مین ہم نی بیان کیا تہا کہ ہورنر صاحب کی ترکیب بواسطہ ح (لا + ط) بنانی کی علی العموم درست اور صحیح ہی اب اس بات کو ثابت کرتی ہین

فرض کرو کہ ح (لا) = ع. لا^ن + ع₁ لا^(ن-۱) + ع₂ لا^(ن-۲) + ... + ع ق-۱ لا + ع ق

لا کی جگہہ ی + ط لکھو تو ح (لا) یہہ ہوجایگا کہ

ق. ی^ن + ق₁ ی^(ن-۱) + ق₂ ی^(ن-۲) + ... ق ن-۱ ی + ق ن

اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ ق. ق₁ اور ق ن-۱ ... ق₁ ق. ہورنر صاحب کے عمل سی دریافت ہوجائینگے اب یہہ ظاہری کہ ق. = ع. چونکہ ی = لا - ط تو یہہ جملے تطابق کے سبب سے آپسمین برابر ہونگے

ع. لا^ن + ع₁ لا^(ن-۱) + ع₂ لا^(ن-۲) ... ع ن-۱ لا^(ن-۱) + ع ق

اور ق. (لا - ط)^ن + ق₁ (لا - ط)^(ن-۱) + ق₂ (لا - ط)^(ن-۲) ... ق ن-۱ (لا - ط) + ق ن

اسیواسطی جب ح (لا) کو لا - ط پر تقسیم کرینگے تو باقی ق ن ہیگی اور خارج قسمت پیدا ہوگا

وہ تطابق کی حیثیت سے برابر

$$ق_{.}(لا-ط)^{ن-۱}+ق_{۱}(لا-ط)^{ن-۲}+ق_{۲}(لا-ط)^{ن-۳}+ق_{۳}(لا-ط)^{ن-۴}+\cdots+ق_{ن-۱}$$

ہوگا اب اس جملہ کو جب لا - ط پر تقسیم کرینگے تو باقی ق ن-۱ بچیگا اور خارج قسمت جو پیدا ہوگا وہ تطابق کی حیثیت سے برابر

$$ق_{.}(لا-ط)^{ن-۲}+ق_{۱}(لا-ط)^{ن-۳}+ق_{۲}(لا-ط)^{ن-۴}+\cdots+ق_{ن-۲}$$

ہوگا اب اس جملہ کو جب لا - ط پر تقسیم کرینگے تو باقی ق ن-۲ بچیگا اور خارج قسمت جو پیدا ہوگا وہ تطابق کی حیثیت سی برابر

$$ق_{.}(لا-ط)^{ن-۳}+ق_{۱}(لا-ط)^{ن-۴}+ق_{۲}(لا-ط)^{ن-۵}+\cdots+ق_{ن-۳}$$

ہوگا اور علی ہذا القیاس

پس ق ن و ق ن-۱ و ق ن-۲ و ق ن-۳ ... متواتر باقیات ح (لا) کو لا - ط پر تقسیم کرنی سی اور پھر خارج قسمت جو پیدا ہو اوسکو لا - ط پر تقسیم کرنی سی اور پھر خارج قسمت جدید کو لا - ط پر تقسیم کرنی سے حاصل ہوتی ہین اور بموجب دفعات ۵، ۷ و ۹ کی ہم کو یہہ معلوم ہوتا ہے کہ ہورنر صاحب کی عمل سی یہہ باقیات متواترہ متعین ہوتی ہین

(۲۴۱) معادلات کی حقیقی قیمتون کے تقریباً دریافت کرنی کی بحث ہم نی کافی اور وافی لکھی ہی مگر ابتک کوئی آسان ترکیب عملی مساواتون کی خیالی قیمتون کے دریافت کرنی کی نہین ایجاد ہوئی مگر ایک ترکیب نظری ایسی ہے کہ وہ موقوف اوس ترکیب پے ہے جو ابھی بیان ہوئی دلیل اسکی یہہ ہی کہ فرض کرو $ط+ص\sqrt{-۱}$ مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت ہی پس اس سبب سی کہ $ح(ط+ص\sqrt{-۱})$ کا جزو حقیقی اور جزو خیالی جدا جدا معدوم ہونا چاہیی اسواسطی ہم کو دو نتیجے حاصل ہونگے اونکو ع = ۰ اور ق = ۰ سی شکل دفعہ ۱۴۱ کے تعبیر کرو

یہان ع اور ق قیمتین ط اور ص کی ہونگے اور اگر ہم ط یا ص کو مساوات ع = ۰ اور ق = ۰ سی خارج کرین اور ایک مساوات ایک مجہول کی دریافت کرین تو اس مساوات

کی ہم کو اصلی قیمتیں دریافت کرنی مطلوب ہوں لیکن اسی معلوم ہوا کہ مساوات معلوم کی ہم
ناممکن قیمتیں اسطرح دریافت کر سکتی ہیں کہ ایک اور خاص مساوات بنائیں اور اوسکی اصل قیمتیں
دریافت کریں ایندہ ہم ثابت کرینگے کہ اون دو مجہول کی مساواتوں میں سی ایک مجہول کو
دور کر کی کسطرح ایک مجہول کی مساوات بنانی ہیں اکیسوین[۲۱] باب میں معادلات کی ناممکن قیمتوں
کی دریافت کرنی کی ایک اور ترکیب لکھینگی طالب علم کو چاہیی کہ وہ تہر فورد کی اوس مضمون کو
دیکھی جسمیں اونہوں نی اعداد کی مساواتوں کی حل کرنی کی ترکیب کامل بیان کی

اونیسواں باب قیمتوں کی بالقرینہ جملی

(۲۴۲) ایک جملہ دو یا زیادہ مقداروں کا بالقرینہ اون مقادیر کے لحاظ سی کہلاتا ہے
جو اوسمیں اسطرح واقع ہوں کہ اگر اونمیں سی دو دو میں تبادل ہو تو جملہ نہ متبدل ہو
مثلاً $ا^2 + ب^2 + س^2$ جملہ بالقرینہ تین مقادیر ا و ب و س کا ہے
اور نیز اب + ب س + اح ایسی جملہ بالقرینہ اونہیں مقادیر کا ہی اسواسطے کہ اگر ا اور ب اور س میں
دو دو کے اندر تبادل ہو تو جملہ متبدل نہیں ہوتا

(۲۴۳) مساوات کی امثال جملی بالقرینہ اوسکی قیمتوں کی ہوتے ہیں
اسواسطی کہ بموجب دفعہ ۵۴ کے مساوات $لا^ن + ع_1 لا^{ن-1} + ع_2 لا^{ن-2} \ldots = 0$ میں
$-ع_1 =$ مجموعہ قیمتوں کے
$ع_2 =$ دو دو قیمتوں کی حاصل ضربوں کے مجموعہ کے
اور علی ہذا القیاس اور یہہ امر ظاہر ہی کہ جو جملی قیمتوں کی یہاں واقع ہوتی ہیں جملے بالقرینہ ہوتے ہیں
اس باب کا مطلب اعظم یہہ ہی کہ ہم یہہ ثابت کریں کہ ہر یک جملہ بالقرینہ ناطقہ مساوات کی
قیمتوں کا مساوات کی امثال کی رقموں میں بیان ہو سکتا ہی اب ہم اغاز اس مطلب کا نیوٹن صاحب
کی اوس ضابطہ سی کرتی ہیں جو مساوات کی قیمتوں کی قوا جمع کرنے کے باب میں ہے
(۲۴۴) فرض کرو کہ $لا^ن + ع_1 لا^{ن-1} + ع_2 لا^{ن-2} + \ldots + ع_ن$ کو ح (لا)

تعبیر کرتا ہی اور ا و ب و س اور مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتون کو تعبیر کرتے ہین

فرض کرو کہ $ص_۱ = ا + ب + س + د ...$

$$ص_۲ = ا^۲ + ب^۲ + س^۲ + د^۲ + ...$$

$$ص_۳ = ا^۳ + ب^۳ + س^۳ + د^۳ + ...$$

اور علی ہذا القیاس $ص_۱$ مجموعہ قیمتون کا ہی اور $ص_۲$ مجموعہ قیمتون کے مجذورون کا ہے اور $ص_۳$ مجموعہ قیمتون کی مکعبون کا ہی غرض بالعموم $ص_م$ مجموعہ قیمتون کے م قوتون کا ہے

بموجب دفعہ ۱۴۷ کے

$$ح'(لا) = \frac{ح(لا)}{لا - ا} + \frac{ح(لا)}{لا - ب} + \frac{ح(لا)}{لا - س} + ...$$

اس متطابقہ کی بائین طرف جو تقسیمین لکھی ہین وہ بموجب دفعہ ۷ کی ٹھیک ٹھیک ہوسکتی ہین اور ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{ح(لا)}{لا - ا} = لا^{ن-۱} + (ا + ع_۱) لا^{ن-۲} + (ا^۲ + ع_۱ ا + ع_۲) لا^{ن-۳} + ...$$

$$+ (ا^م + ع_۱ ا^{م-۱} + ع_۲ ا^{م-۲} ....) لا^{ن-م-۱} + ...$$

اور اسی کی متماثل جملی $\frac{ح(لا)}{لا - ب}$ اور $\frac{ح(لا)}{لا - س}$ ... حاصل ہونگی اور جمع کرنی سی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے

$$ح'(لا) = ن لا^{ن-۱} + (ص_۱ + ن ع_۱) لا^{ن-۲} + (ص_۲ + ع_۱ ص_۱ + ن ع_۲) لا^{ن-۳}$$

$$+ (ص_م + ع_۱ ص_{م-۱} + ع_۲ ص_{م-۲} + ... + ن ع_م) لا^{ن-م-۱}$$

اور نیز $ح'(لا) = ن لا^{ن-۱} + (ن-۱) ع_۱ لا^{ن-۲} + (ن-۲) ع_۲ لا^{ن-۳} + ...$

$$+ (ن-م) ع_م لا^{ن-م-۱} + ...$$

اس متطابقہ مین امثال لا کی یکسان قوا کے برابر لکھو تو

$$ص_۱ + ن ع_۱ = (ن-۱) ع_۱ \quad یا \quad ص_۱ + ع_۱ = ۰$$

$$ص_۲ + ع_۱ ص_۱ + ن ع_۲ = (ن-۲) ع_۲ \quad یا \quad ص_۲ + ع_۱ ص_۱ + ۲ ع_۲ = ۰$$

اور علی العموم

$$ص_م + ع_۱ ص_{م-۱} + ع_۲ ص_{م-۲} + ... + ن ع_م = (ن-م) ع_م$$

یعنی ص م + ع۱ ص م-۱ + ع۲ ص م-۲ + ۰۰۰ + ع م-۱ ص۱ + م ع م =
اس نتیجہ عامہ مین م بہ نسبت ن کے چہوٹا فرض کیا گیا ہے
اس نتیجہ عامہ کی وساطت سی ہم مجموعہ قیمتون کی م وین قوت کا امثال و قیمتون کے ادنی درجہ کے قوتون کی رقمون مین بیان کر سکتی ہین اور اسی عمل کو مکرر سہ کرر کرنی سی ہم قیمتون کی م وین قوتون کے مجموعہ کو امثال کی رقمون مین بیان کر سکتی ہین
اب فرض کرو کہ م کی ساتہہ ن سی چہوٹی ہونی کی قید جاتی رہی مساوات معلوم ح (لا) = ۰ کی لا^م-ن مین ضرب دو تو لا^م-ن ح (لا) = ۰ یعنی

لا^م + ع۱ لا^م-۱ + ع۲ لا^م-۲ + ۰۰۰ + ع ن لا^م-ن = ۰

کی جگہ متواتر قیمتین ا و ب و س ۰ ۰ ۰ رکہو اور ما حصل کو جمع کرو تو اسطرح

ص م + ع۱ ص م-۱ + ع۲ ص م-۲ + ۰۰۰ + ع ن ص م-ن = ۰

اس مسئلہ سی ہم مساوات کی قیمتون کی م وین قوتون کی مجموعہ کو امثال مساوات اور قیمتون کی ادنی قوتون کی رقمون مین اوس حالت مین کہ م چہوٹا ن سی ہو بیان کر سکتی ہین اور اسی عمل کو مکرر سہ کرر کرنی سی مساوات کی قیمتون کی م قوتون کو جمع کر سکتے ہین
(۲۴۵) مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتون کی منفی قوتون کی مجموعہ کو دریافت کرو
لا کی جگہ ۱/ی رکہو اور اس بدلی ہوئی مساوات مین قیمتون کی مثبت قوتون کے مجموعہ کو معلوم کرو یا دفعہ گذشتہ کی اخر نتیجہ مین م کو متواتر برابر ن-۱ اور ن-۲ اور ن-۳ ۰ ۰ کے بناؤ تو اوسی متواتر ص-۱ و ص-۲ و ص-۳ ۰ ۰ ۰ حاصل ہونگے
(۲۴۶) جملہ بالقرینہ ناطقہ کی قیمت دریافت کرنی کی سوال عامہ کی صورت اس سوال کی صورت مین متبدل ہو جائیگی کہ خاص مفرد جملون کی قیمت دریافت کرو اور اب ہم اس کو ثابت کر دینگی
کوئی جملہ بالقرینہ ناطقہ اگر صحیح نہ ہو تو وہ خارج قسمت ہوگا جو ایک جملہ بالقرینہ ناطقہ صحیحہ کو دوسرے جملہ بالقرینہ ناطقہ صحیحہ پر تقسیم کرنی سی پیدا ہوا ہو کوئی سا جملہ بالقرینہ ناطقہ صحیحہ اگر متجانس

نہ ہو تو وہ دو یا زیادہ جملے بالقرینہ ناطقہ صحیحہ کا مجموعہ ہوگا پس اسی معلوم ہوا کہ فقط تحت متجانسہ جملوں ہی پر چاہیئے ایک جملہ متجانسہ مرکب مختلف اجزا سے ہو سکتا ہی جسمین گو مجموعہ قوت نما اون کا ایک ہی رہی مگر وہ خود قوت نما مختلف ہوں ایسی صورت مین جملہ متجانسہ مجموعہ دو یا زیادہ اون متجانسہ جملوں کا ہی جو متحد الدرجہ ہین اور اون مین سب رقموں مین ایک ہی قوت نما ہے اسی معلوم ہوا کہ فقط اون ہی جملوں بالقرینہ ناطقہ متجانسہ پر کرنی چاہیئے جنمین تمام رقموں مین قوت نما ایک ہی ہین

(۲۴۷) فرض کرو کہ ا و ب و س اور د . . مساوات معلوم کی قیمتوں کو تعبیر کرتے ہین بموجب دفعہ ۲۴۴ کے ہم امثال کے رقموں مین قیمت

ا م + ب ا + س ا + د ا . . .

کی قیمت بیان کر سکتی ہین اس جملہ کو اول رتبہ کا جملہ کہتی ہین کیونکہ اوسکی ہر ایک رقم مین ایک قیمت مساوات کی قیمتوں مین سے ہے

جب جملہ کی ہر رقم مین قیمتوں مین سی دو دو ملتصق ہوں تو اوسکو دوسرے رتبہ کا جملہ کہتی ہین جیسی یہہ جملہ

ط ا س ع + ط ا س ع + ص ا س ع + . . .

اب یہاں ترتیباً قیمتوں مین سی دو دو کی لی گئی ہی اور قوت نما م اول قیمت پر اور ع قوت نما دوسری قیمت پر رکہا گیا ہی اب اس جملہ کو ہم ح ا ب ع سے تعبیر کرینگے کیونکہ وہ حاصل جمع ایسی رقموں کا جیسی کہ رقم ا م ب ع ہی جب قیمتوں مین سی تین تین قیمتین جملہ مین ملتصق ہوں تو اوس جملہ کو تیسری رتبہ کا جملہ کہتی ہین جیسی کہ یہہ جملہ ہے

ا ع س ق + ا م س ع د ق + ا ا ب ع د ق + . . .

یہاں ترتیب قیمتوں مین سی تین تین کی ایک دفعہ لی گئی ہی اور م اول قیمت پر اور ع دوسرے قیمت پر اور ق تیسرے قیمت پر رکہا گیا ہی ہم اس جملہ کو ح ا م ب ع س ق سی تعبیر کرینگی کیونکہ وہ حاصل جمع ایسی رقموں کا ہے جیسی کہ ا م ب ع س ق کا ہے

اور اسیطرح سی چوتھی اور زیادہ رتبی کی جملی ہم مقرر کر سکتی ہین اور اسی طریقہ سی انکی ثابت کر سکتی ہین
چونکہ ہم نی یہہ بتلا دیا ہی کہ ص م سی کسطرح جملہ کو مثال مساوات کی رقموں مین بیان کر سکتی ہین
تو صرف یہہ بتلا دینا کافی ہوگا کہ ہم جن جملوں پر بحث کر رہی ہین اونمین سی کوئی ایسی جملوں
کی رقموں مین جیسی ص م ہی کسطرح بیان ہو سکتا ہے

(۲۴۸) دوسرے رتبہ کی $ح\, ا^{م} ب^{ع}$ جملہ بالقرینہ کی قیمت دریافت کرو

ہم کو معلوم ہی کہ $ص_{م} = ا^{م} + ب^{م} + س^{م} + \dots$

$ص_{ع} = ا^{ع} + ب^{ع} + س^{ع} + \dots$

ضرب دینی سی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$ص_{م}\, ص_{ع} = ا^{م+ع} + ب^{م+ع} + س^{م+ع} + \dots$

$+ ا^{م} ب^{ع} + ا^{م} س^{ع} + ب^{م} ا^{ع} + \dots$

یعنی $ص_{م}\, ص_{ع} = ص_{م+ع} + ح\, ا^{م} ب^{ع}$

اسیواسطی $ح\, ا^{م} ب^{ع} = ص_{م}\, ص_{ع} - ص_{م+ع}$

اسمین م اور ن غیر مساوی فرض کئی گئی ہین اگر ہم ع کو برابر م کے فرض کرین تو
$ح\, ا^{م} ب^{ع}$ مین دو دو رقمین برابر ہو جائینگی اور یہہ حاصل جمع اسطرح بیان کیا جائیگا کہ
$۲\, ح\, (ا\, ب)^{م}$ اور اسیواسطی

$۲\, ح\, (ا\, ب)^{م} = ص_{م}^{۲} - ص_{۲م}$

(۲۴۹) تیسری رتبہ کی جملہ بالقرینہ $ح\, ا^{م} ب^{ع} س^{ق}$ کی قیمت دریافت کرو

ہم کو معلوم ہی کہ $ح\, ا^{م} ب^{ع} = ا^{م} ب^{ع} + ب^{م} ا^{ع} + ا^{م} س^{ع} + \dots$

$ص_{ق} = ا^{ق} + ب^{ق} + س^{ق}$

ضرب دینی سی یہہ ہم کو حاصل ہوتا ہے کہ

$ص_{ق}\, ح\, ا^{م} ب^{ع} = ا^{م+ق} ب^{ع} + ب^{م+ق} س^{ع} + س^{م+ق} ا^{ع} + \dots$

$$= \frac{مح(لا) - مح(ا)}{لا - ا} + \frac{مح(لا) - مح(ب)}{لا - ب} + \frac{مح(لا) - مح(س)}{لا - س} + \cdots$$

$$+ \frac{مح(ا)}{لا - ا} + \frac{مح(ب)}{لا - ب} + \frac{مح(س)}{لا - س} + \cdots$$

اس متطابقہ مین اجزاء صحیحہ اور اجزاء مکسورہ جدا جدا آپسمین برابر ہونگے اور اسی جملی بیانیہ جیسی کہ $\frac{مح(لا) - مح(ا)}{لا - ا}$ ہی بموجب دفعہ ۷ کے صحیح ہونگے فرض کرو کہ مح (لا) ح َ (لا) کو ح (لا) پر تقسیم کرین اور عمل کئی جائیں جب تک کہ باقی ایک جملہ صحیحہ لا کا ادنے درجہ کا بہ نسبت ح (لا) کی حاصل ہو اور ر باقی ہو تو متطابقہ کے اجزاء مکسورہ سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{ر}{ح(لا)} = \frac{مح(ا)}{لا - ا} + \frac{مح(ب)}{لا - ب} + \frac{مح(س)}{لا - س} + \cdots$$

کو ضرب دو لا تو

$$ر = لا^{ن-1} \left\{ مح(ا) + مح(ب) + مح(س) + \cdots \right.$$

+ ارقام ضمنین بہ نسبت $لا^{ن-1}$ کے ادنے قوتین ملتفا ہین

پس مح (ا) + مح (ب) + مح (س) + ... باقی ر مین $لا^{ن-1}$ کے امثال کی برابر ہے

(۲۵۱) اس باب کی صور قانونیہ کی ایک مثال لکھتی ہین فرض کرو کہ مساوات $لا^4 - لا^3 - 7لا^2 + لا + 6 = 0$ کی قیمتوں کی قوتوں کا حاصل جمع دریافت کرنا ہے

$ص_1 = -ع_1 = 1$

$ص_2 = -ع_1 ص_1 - 2ع_2 = 1 + 14 = 15$

$ص_3 = -ع_1 ص_2 - ع_2 ص_1 - 3ع_3 = 15 + 7 - 3 = 19$

$ص_4 = -ع_1 ص_3 - ع_2 ص_2 - ع_3 ص_1 - 4ع_4 = 19 + 105 - 1 - 24 = 99$

$ص_5 = -ع_1 ص_4 - ع_2 ص_3 - ع_3 ص_2 - ع_4 ص_1 = 99 + 133 - 15 - 6 = 211$

$ص_6 = -ع_1 ص_5 - ع_2 ص_4 - ع_3 ص_3 - ع_4 ص_2 = 211 + 693 - 19 - 90 = 795$

اور علیٰ ہذا القیاس

$\frac{1}{لا}$ کو بجای لا کے مساوات معلوم مین رکھو تو

$$ی^4 + \frac{1}{4}ی^3 - \frac{7}{4}ی^2 - \frac{1}{4}ی + \frac{1}{4} = 0$$

پس اصل مساوات کی قیمتون کی منفی قوتون کی جمع کرنی کی واسطی ہم کو یہہ معلوم ہی کہ

$$ص_{-1} = -\frac{1}{4}$$

$$ص_{-2} = -\frac{1}{4}ص_{-1} - 2(-\frac{7}{4}) = \frac{14}{4} + \frac{1}{34} = \frac{85}{34}$$

ان نتایج کا اثبات آسانی سی ہوسکتا ہی کیونکہ اصل مساوات ایسی بنائی گئی ہی کہ اوسکی قیمتین

-۲ و -۱ او ا و ۳ ہین

اب پہر فرض کرو کہ ہم کو اس چوتہی درجہ کی مساوات $لا^4 + ع لا^3 + ق لا^2 + ر لا + ث = 0$

کی قیمتین ص۱ و ص۲ و ص۳ و ص۴ کی دریافت کرنی ہین

$ص_1 + ع = 0$ اسیواسطی $ص_1 = -ع$

$ص_2 + ع ص_1 + 2ق = 0$ اسیواسطی $ص_2 = ع^2 - 2ق$

$ص_3 + ع ص_2 + ق ص_1 + 3ر = 0$ اسیواسطے $ص_3 = -ع(ع^2 - 2ق) + ع ق - 3ر$

$$= -ع^3 + 3ع ق - 3ر$$

$$ص_4 + ع ص_3 + ق ص_2 + ر ص_1 + 4ث = 0$$

اسیواسطے $ص_4 = -ع(-ع^3 + 3ع ق - 3ر) - ق(ع^2 - 2ق) + ر ع - 4ث$

$$= ع^4 - 4ع^2 ق + 4ر ع + 2ق^2 - 4ث$$

ایک اور مثال مساوات درجہ چہارم کی لو فرض کرو کہ مساوات درجہ چہارم کی $لا^4 + ع لا^3 + ق لا^2 + ر لا + ث = 0$

کی قیمتین سہ و صہ و لر و فر ہین

فرض کرو کہ $ا = \frac{1}{2}(سہ صہ + لر فر)$ و $ب = \frac{1}{2}(سہ لر + صہ فر)$ و $س = \frac{1}{2}(سہ فر + صہ لر)$

اور ہم کو اس مساوات درجہ چہارم کی قیمتون کی ان بالقرینہ جملون کی نسبت دریافت کرنی ہو

(۱)　　ا + ب + س

(۲) اب + ب س + س ا

(۳) ا ب س

(۱) ا + ب + س = ½ (سہ صہ + سہ لر + صہ فر + صہ لر + صہ فر + لر فر) = ق/۲

(۲) ا ب + ب س + س ا = ¼ (سہ² صہ لر + سہ² لر فر + ۰۰۰) = ¼ ح سہ² صہ لر

= ⅛ (ص۱² ص۲ − ص۲² − ۲ ص۱ ص۳ + ۲ ص۴) بموجب دفعہ ۲۴۹ کے

پس قیمتیں ص۱ و ص۲ و ص۳ و ص۴ کی جو اہی حاصل ہوئی ہیں اونکی جگہ مندرج کرو تو قیمت ¼ ح سہ² صہ لر کی دریافت ہوگی یا ہم اسطرح عمل کریں کہ

ح سہ² صہ لر = ح سہ² صہ لر فر / فر = سہ صہ لر فر ح سہ / فر

اور سہ صہ لر فر = ث اور ح سہ / فر = ع ر − ۴ بموجب دفعہ ۴۸ کے

اسواسطے ا ب + ب س + س ا = ¼ (ع ر − ۴ ث)

(۳) ا ب س = ⅛ (سہ³ صہ لر فر + ۰۰۰ + سہ² صہ² لر² + ۰۰۰) =

⅛ ح سہ³ صہ لر فر + ⅛ ح سہ² صہ² لر²

اس باب کی ترکیبوں سے ان دو بالقرینہ جملوں کی قیمت دریافت ہو سکتی ہی اور اون ترکیبوں کا ہم اختصار اسطرح کرتے ہیں کہ

ح سہ³ صہ لر فر = سہ صہ لر فر ح سہ² = ث (ع² − ۲ ق)

ح سہ² صہ² لر² = سہ² صہ² لر² فر² ح 1/سہ² = ث² (ر²/ث² − ۲ق/ث)

اسواسطے کہ ح (1/سہ²) دریافت کرنی کی واسطے اوس مساوات کے قیمتوں کے مجذوروں کا حاصل جمع دریافت کریں جسمیں لا کی جگہ 1/لا لکھا جاوے

پس ا ب س = ⅛ (ر² + ع² ث − ۴ ق ث)

قیمتیں جملوں ا و ب و س کی جو دریافت ہوئی ہیں اونکی صحت ثابت ہو سکتی ہی اسلئے کہ وہ بموجب دفعہ ۱۸۹ کے قیمتیں م کی مکعبی مساوات کی بموجب دفعہ ۱۸۸ کے ہیں

بیسواں باب استعمال بالقرینہ جملوں کا

(۲۵۲) مساوات کی قیمتون کی بالقرینہ جملون کے مسئلہ کو ہم دو جگہ کام مین لاینگی اول ایسی مساوات کی بنا کی جسکی قیمتین مساوات مفروضہ کی قیمتون کی تفاوت کے مجذور ہون اور دوم ایک بڑا مسئلہ مساوات مین سی مجہول کی دور کرنے کا اوسی ثابت کرینگے

(۲۵۳) ایسی مساوات بناؤ کہ جسکی قیمتین مساوات مفروضہ کی قیمتون کے تفاوت کا مجذور ہون

فرض کرو کہ مساوات مفروضہ ان درجہ کی ہی اور اوسکی قیمتین ا و ب و س ... ہین تو مساوات مطلوبہ کی قیمتین $(ا-ب)^2$ و $(ا-س)^2$ ... $(ب-س)^2$ ... ہونگین اور ان کی تعداد برابر اوس اجتماع کی ہوگی جو ن چیزون مین سی دو دو کا لیا جاے یعنی $\frac{1}{2}$ ن (ن - ۱) اسیواسطی یہہ عدد مساوات مطلوبہ کی درجے کو تعبیر کریگا — $\frac{1}{2}$ ن (ن - ۱) کی جگہ م رکھو اور فرض کرو کہ مساوات مطلوبہ

$$لا^م + ق_۱ لا^{م-۱} + ق_۲ لا^{م-۲} + \dots + ق_م = ۰$$

سے تعبیر ہوتی ہی اور ص$_ر$ اوسکی قیمتون کی روین قوتون کا مجموعہ ہی پس ہم کو ص$_۱$ و ص$_۲$ ... ص$_م$ کا صرف تحقیق کرنا ہی اور بعد اس تحقیق کرنی کی امثال مساوات مطلوبہ کے بموجب دفعہ ۲۴۴ کے ان صور قانونیہ سی متواتر دریافت ہوجائینگی کہ ص$_۱$ + ق$_۱$ = ۰ ص$_۲$ + ق$_۱$ ص$_۱$ + ۲ق$_۲$ = ۰ اور علی ہذا القیاس

فرض کرو کہ ح (لا) = $(لا-ا)^{۲ر} + (لا-ب)^{۲ر} + (لا-س)^{۲ر} + \dots$

پس ۲ ص$_ر$ = ح (ا) + ح (ب) + ح (س) + ...

اب فرض کرو کہ ص$_۱$ و ص$_۲$ و ص$_{۲ر}$ ... مساوات مفروضہ کی قیمتون کے قوتون کے مجموعون کو تعبیر کرتی ہین تو

$$ح (لا) = ن لا^{۲ر} - ۲ر ص_۱ لا^{۲ر-۱} + \frac{۲ر (۲ر - ۱)}{۱ \times ۲} ص_۲ لا^{۲ر-۲} - \dots + ص_{۲ر}$$

لا کی جگہ متواتر ا و ب و س ... رکھو اور جمع کرو تو

$$۲ ص_ر = ن ص_{۲ر} - ۲ر ص_۱ ص_{۲ر-۱} + \frac{۲ر (۲ر - ۱)}{۱ \times ۲} ص_۲ ص_{۲ر-۲} - \dots + ص_{۲ر} ن$$

بائین طرف جو ارقام لکھی ہین انمین اول اور آخر سی ارقام متساوی البعد آپسمین برابر ہین اسیواسطے

اونکی ترتیب ثانی سی اور ۲ پر تقسیم کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{صَ}_{\text{ر}} = \text{ق ص}_{\text{۲ر}} - \text{۲ر ص}_{\text{۱}}\text{ص}_{\text{۲ر-۱}} + \frac{\text{۲ر (۲ر-۱)}}{\text{۱}\times\text{۲}}\,\text{ص}_{\text{۲}}\text{ص}_{\text{۲ر-۲}} - \cdots$$

$$+\tfrac{1}{2}(-1)^{\text{ر}}\,\frac{\text{۲ر (۲ر-۱)} \cdots \text{(ر+۱)}}{\text{لر}}\,\text{ص}_{\text{ر}}^{2}$$

اب ص۱ اور ص۲ . . . مساوات مفروضہ کی امثال کی رقموں مین بیان ہوسکتی ہین پس صَر معلوم ہوسکتا ہے اور پھر اوسی اخرکار مساوات مطلوبہ کی امثال دریافت ہوجائینگے

(۲۵۴) مساوات مطلوبہ کی اخر رقم جو قام سی تعبیر کی گئی ہی اوسکا حساب ایک اور طریقہ سی بھی ہوسکتا ہی

فرض کرو کہ مساوات مفروضہ ح (لا) = ۰ پس

$$\text{ح (لا)} = \text{(لا - ا) (لا - ب) (لا - س)} \cdots$$

$$\text{پس حَ (لا)} = \text{(لا - ب) (لا - س)} \cdots + \text{(لا - ا) (لا - س)} \cdots + \cdots$$

$$\text{حَ (ا)} = \text{(ا - ب) (ا - س)} \cdots$$

$$\text{حَ (ب)} = \text{(ب - ا) (ب - س)} \cdots$$

اسی معلوم ہوا کہ قام = حَ (ا) حَ (ب) حَ (س) . . .

اب فرض کرو کہ سہ و صہ و لر . . . قیمتین مساوات حَ (لا) = ۰ کی ہو تو

$$\text{حَ (لا)} = \text{ن (لا - سہ) (لا - صہ) (لا - لر)} \cdots$$

اسیواسطی حَ (ا) حَ (ب) حَ (س) . . .

$$= \text{ن}^{\text{ن}}\,\text{(ا - سہ) (ا - صہ) (ا - لر)} \cdots \text{(ب - سہ) (ب - صہ)} \cdots \text{(س - سہ)} \cdots$$

$$\text{لیکن (ا - سہ) (ب - سہ) (س - سہ)} \cdots = (-1)^{\text{ن}}\,\text{ح (سہ)}$$

$$\text{(ا - صہ) (ب - صہ) (س - صہ)} \cdots = (-1)^{\text{ن}}\,\text{ح (صہ)}$$

اور علی ہذا القیاس

$$\text{پس حَ (ا) حَ (ب) حَ (س)} = \text{ن}^{\text{ن}}\,(-1)^{\text{ن (ن-۱)}}\,\text{ح (سہ) ح (صہ) ح (لر)} \cdots$$

$$= \text{ن}^{\text{ن}}\,\text{ح (سہ) ح (صہ) ح (لر)} \cdots$$

اسواسطی $(-1)^{ن(ن-1)} = 1$

ابح (سہ) ح (صہ) ح (لہ) ... مساوات مشتقہ ح (لا) = ۰ کی قیمتون کا جملہ بالقرینہ ہی اور اسیواسطی اوسکا حساب ہوسکتا ہے

(۲۵۵) ایک فایدہ ایسی مساوات کی دریافت کرنی کا کہ جسکی قیمتیں مساوات مفروضہ کی قیمتون کے تفاوت کا مجذور ہون دفعہ ۱۰۹ مین ہم نی بیان کیا ہی کہ اوسی مساوات مفروضہ کی قیمتون کا مقام معلوم ہوتا ہی مگر یہہ مطلب تو سٹرم صاحب کی ضابطہ سی خوب حاصل ہوتا ہی ایک اور بات اسی مساوات سی کہ جسکی قیمتیں مساوات مفروضہ کی قیمتون کے تفاوت کا مجذور ہون حاصل ہوتی ہی کہ اوسکی قیمتون کی دیکھنے سی مساوات مفروضہ کی خیالی قیمتون کی تعداد معلوم ہوجاتی ہی اسواسطے کہ یہہ امر ظاہر ہی کہ اس جدید مساوات کی منفی قیمتیں ہون تو مساوات مفروضہ کی خیالی قیمتیں ہونگیں اور اگر مساوات جدید کی منفی قیمتیں نہ ہون تو مساوات مفروضہ کی خیالی قیمتیں نہ ہونگیں اگر مساوات جدید کی خیالی قیمتیں ہون تو مساوات مفروضہ کی بہی خیالی قیمتیں ہونگیں اور اگر اوسکی کوئی خیالی قیمت نہ ہو تو مساوات مفروضہ کی بہی کوئی خیالی قیمت نہ ہوگی

مثلاً مساوات مفروضہ درجہ چہارم کے یہہ قیمتیں $\pm$ لہ $\sqrt{-1}$ اور $\pm$ لو $\sqrt{-1}$ ہون تو اس صورت مین مساوات جدید کی حقیقی منفی قیمتیں ہونگیں

(۲۵۶) اگر دو مساواتون مین دو مقادیر مجہولہ ہون تو اب ہم یہہ بتلائینگی کہ اونمین سے ایک مقدار مجہول قیمتون کی بالقرینہ جملون سی کسطرح دور کرتے ہین

فرض کرو کہ مساواتین یہہ ہون کہ

$$ع_0 لا^م + ع_1 لا^{م-1} + ع_2 لا^{م-2} + \ldots + ع_م = 0$$

$$ق_0 لا^ن + ق_1 لا^{ن-1} + ق_2 لا^{ن-2} + \ldots + ق_ن = 0$$

امثال ع$_0$ و ع$_1$ و ع$_2$ ... ق$_0$ و ق$_1$ و ق$_2$ ... مقدار ی کے جملے ناطقہ صحیحہ ہین اور لا کا دور کرنا منظور ہے

فرض کرو کہ ان مساواتون مین سی اول مساوات سی لا کی قیمتین ارقام ر مین دریافت ہوتی ہین اور ا و ب و س ۰۰۰ ن کو تعبیر کرتی ہین ان کو دوسری مساوات مین مندرج کرو تو ہم کو م مساواتین ر کے تحقیق کرنے کے واسطی حاصل ہونگین یعنی

$$ق_0\, ا^{ن} + ق_1\, ا^{ن-1} + ق_2\, ا^{ن-2} + \cdots + ق_ن = 0$$

$$ق_0\, ب^{ن} + ق_1\, ب^{ن-1} + ق_2\, ب^{ن-2} + \cdots + ق_ن = 0$$

$$ق_0\, س^{ن} + ق_1\, س^{ن-1} + ق_2\, س^{ن-2} + \cdots + ق_ن = 0$$

پس تمام قیمتین ر کی جو قابل داخل ہوتی کی ہین وہ ان مساواتون کی قیمتون مین شامل ہین اور بالعکس اسکی جو کوئی قیمت ان مساواتون کی ہو وہ ر کی قیمت قابل داخل ہونی کے ہے اسواسطی کہ تمثیلاً فرض کرو کہ مساوات اول کی ایک قیمت صہ ہی اور جب ا مین بجای ر کی صہ کہا جاے تو ا کی قیمت سہ ہوتی ہی پس لا = سہ اور ر = صہ دو اصل مساواتون کی شرایط کو پورا کرینگے اسواسطی کہ یہہ قیمتین بظاہر دوسرے مساوات کی شرایط کو پورا کرتی ہین اور مساوات اول کی شرایط لا = ا سی پوری ہوتی ہین خواہ ر کچہہ ہی ہو پس اسلئی جب ہم لا = ا اور ا مین ر کو صہ مقرر کرین تو بہی اول مساوات کی شرایط پوری ہونگین اسی یہہ استخراج ہوتا ہے کہ اگر اوپر کی مساواتون کی دائین طرف کی ارکان کو باہم ضرب دین اور حاصل ضرب کو برابر صفر کے لکہہ دین تو ایک مساوات اخر کار ر کی حاصل ہو جائیگی

مقادیر ا اور ب و س ۰۰۰ مین سی دو دو کے باہم تبادل سی یہہ حاصل ضرب متبدل نہین ہوگا اسلئی ان مقادیر کا وہ جملہ بالقرینہ ہوگا اور اسلئی اوسکی قیمت مساوات اول کو مثال ع و ع۱ و ع۲ ۰۰۰ کی رقمون مین بیان ہو سکتی ہی پس اسطرح اخر کو ایک مساوات ناطقہ صحیحہ ر کی حاصل ہو جائیگی اور اوسمین وہی سب قیمتین ر کی ہونگین جو داخل ہونے کی قابلیت رکہتی ہین اور اونکی سوا کوئی اور قیمت نہین ہوگی

(۲۵۷) ایک خاص مثال فرض کرو کہ ایک مساوات مکعبی ہے اور دوسرے مساوات درجہ دوم کی ہے

اور ہم کو لا کا دور کرنا مساواتوں سے منظور ہے

ع. لا^۳ + ع۱ لا^۲ + ع۲ لا + ع۳ = ۰ ق. لا^۲ + ق۱ لا + ق۲ = ۰

اسمیں مثال ء کی جملی فرض کی گئی ہیں اب بموجب دفعہ گذشتہ کی طریقہ کتابت کی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے

(ق. ا^۲ + ق۱ ا + ق۲) (ق. ب^۲ + ق۱ ب + ق۲) (ق. س^۲ + ق۱ س + ق۲) = یعنی

ق۲^۳ + ق۱^۳ ا ب س + ق.^۳ ا^۲ ب^۲ س^۲ + ق۱^۲ ق۲ حج ا^۲ ب + ق.^۲ ق حج ا^۲ ب^۲ س + ق۱ ق۲ حج ا ب

+ ق۱ ق۲^۲ حج ا + ق. ق۲^۲ حج ا^۲ + ق. ق۱^۲ حج ا^۲ ب س + ق. ق۱ ق۲ حج ا^۲ ب = ۰

اور نیز ا ب س = − ع۳/ع. اور ا^۲ ب^۲ س^۲ = ع۳^۲/ع.^۲

حج ا^۲ ب^۲ = ا^۲ ب^۲ س^۲ حج ۱/ا^۲ = ع۳^۲/ع.^۲ (ع۲^۲/ع۳^۲ − ۲ع۱/ع۳)

حج ا^۲ ب س = ا ب س حج ا ب = − ع۳/ع. حج ا ب = − ع۲ ع۳/ع.^۲

حج ا = − ع۱/ع. حج ا^۲ = ع۱^۲/ع.^۲ − ۲ع۲/ع.

حج ا^۲ ب س = ا ب س حج ا = ع۱ ع۳/ع.^۲

حج ا^۲ ب = ا ب س حج ا/ب = − ع۳/ع. (ع۱ ع۲/ع. ع۳ − ۳) بموجب دفعہ ۲۴۸ کے

ان قیمتوں کی مندرج کرنی سی وہ مساوات حاصل ہوگی جو لا کے دور کرنے سے حاصل ہوتی

(۲۵۸) اگر ایک مساوات م درجہ اور دوسری ن درجہ کی ہو اور اونمیں دو مقداریں مجہول ہوں اور اونمیں سی ایک مقدار مجہول کو دور کریں تو مساوات مستحصلہ م ن درجہ سی زیادہ درجہ کی نہیں ہوگی

فرض کرو کہ مساواتیں یہہ ہوں کہ

ع. لا^م + ع۱ لا^(م−۱) + ع۲ لا^(م−۲) + . . . + ع م = ۰

ق. لا^ن + ق۱ لا^(ن−۱) + ق۲ لا^(ن−۲) + . . . + ق ن = ۰

ان مساواتوں میں مثال جملی ء کی ہیں اور علاوہ اسکی یہہ بھی فرض کیا گیا ہی کہ مساوات اول میں لا اور ی کی قوت نمایوں کا مجموعہ م سی زیادہ نہیں ہی اور مساوات دوم میں ن سی زیادہ نہیں ہے پس ع م اور ق م ر درجہ کی ی میں ہو سکتی ہیں مگر ر سی زیادہ نہیں اب فرض کرو کہ دفعہ ۲۵۷ کے

کی ترکیب کی موافق لادور کیا گیا تو ر کی مساوات آخر کا اول رکن مین ایک سلسلہ ارقام کا ہوگا جسمین سی ہر ایک رقم حاصل ضرب م اجزا ضربی کا ہی اور اوسکی صورت ق ا ر ن − ر × ق ب ص ن − ص + ق ط س ن − ط × ہی اور چونکہ ہم یہہ جانتی ہین کہ یہہ سلسلہ ارقام کا جملہ بالقرینہ ا د ب س ... کا ہی تو مجموعہ ارقام مع قوت نمایون کی جنکا ابھی ذکر کیا ہے یہہ ہوگا کہ

ق ا ر ق ب ص ق ط ... ح ا ن − ر ب ن − ص س ن − ط

اب درجہ ق ا ر ق ب ص ق ط ... کا اعلی ر + ص + ط + ... سی نہین ہی تو اب ہم کو صرف یہہ ثابت کرنا رہا کہ درجہ ح ا ن − ر ب ن − ص س ن − ط ... کا بڑا ن − ر + ن − ص + ن − ط + ... سی نہین تو اسی یہہ استخراج ہوگا کہ حاصل ضرب کا درجہ اعلی م ن سی نہین ہی اب یہہ نتیجہ مطلوبہ دو مشاہدون سی حاصل ہوتا ہی اول دفعہ ۲۲۴ کے صور قانونیہ سی یہہ ثابت ہوسکتا ہے کہ ص م مین اعلی قوتین ر کی بہ نسبت م ر کی نہین ملتی ہین دوم دفعہ ۲۴۸ اور ۲۴۹ کے عملوں سی مستنبط ہوتا ہی کہ قیمت ح ا ر ب م س ر ... مین قوتین اور حاصل ضرب ص ۱ و ص ۲ و ص ۳ ... ص ر + م ر + س ر ملتی ہی اور ہر رقم مین فرض کی حروف ماتحت کا مجموعہ ل + م ر + س ر + ... ہے

اسی ہم یہہ نتیجہ نکالتی ہین کہ آخر مساوات ر مین کوئی قوت ر کی اعلی م ن سی نہین واقع ہوتی (۲۵۹) دفعہ گذشتہ سی ر کی آخر مساوات کی درجہ کی حد غائی معلوم ہوتی ہی کہ اوسی آگے وہ نہین بڑھتا لیکن وہ بعض صورتوں مین اس حد غائی سی چھوٹا ہوتا ہے

مسئلہ کی توسیع ہوسکتی ہی اور یہہ نتیجہ عامہ اوسی مستنبط ہوتا ہی کہ جتنی مساواتین ہون اونمین اوتنی ہی مقادیر مجہول ملتی ہون اور یہہ تمام مقادیر مجہولہ سوا ایک کے دور کیجائین تو آخر کو جو مساوات حاصل ہوگی اوسکا درجہ اصل مساواتون کی درجون کی حاصل ضرب سی بڑا نہین ہوگا

سمرٹ کا جبر مقابلہ پڑھو

اکیسوان باب قیمتون کی قوتون کے مجموعی

(۲۶۰) نیوٹن صاحب کی ترکیب دفعہ ۲۴۴ مین جو بیان ہوئی ہی اوسی سے متواتر حاصل جمع مساوات کی قیمتون کی قوتون کا دریافت ہو سکتا ہے

اب ہم ایک اور ترکیب بیان کرتی ہین جسکو کچھ لگاؤ اس پہلی ترکیب سے نہین ہوگا جس سے قیمتون کے قوائے صحیحہ مفروضہ کا مجموعہ حاصل ہو جاوے

فرض کرو کہ ا و ب و س ... مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتین ہین تو ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

$\text{ح}(\text{لا}) = (\text{لا}-\text{ا})(\text{لا}-\text{ب})(\text{لا}-\text{س})\ldots$ اور فرض کرو کہ مساوات ن درجہ کی ہی تو

$$\frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا}^{\text{ن}}} = \left(1-\frac{\text{ا}}{\text{لا}}\right)\left(1-\frac{\text{ب}}{\text{لا}}\right)\left(1-\frac{\text{س}}{\text{لا}}\right)$$

طرفین کی لوگارتم لو اور بائین طرف کی لوگارتم کی صورت مفصلہ لکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{لوگ}\,\frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا}^{\text{ن}}} = -\frac{1}{\text{لا}}(\text{ا}+\text{ب}+\text{س}+\ldots)$$
$$-\frac{1}{2\text{لا}^2}(\text{ا}^2+\text{ب}^2+\text{س}^2+\ldots)$$
$$-\frac{1}{3\text{لا}^3}(\text{ا}^3+\text{ب}^3+\text{س}^3+\ldots)$$
$$\ldots\ldots$$

پس بائین طرف امثال $\frac{1}{\text{لا}^{\text{م}}}$ کا $-\frac{\text{ص}_{\text{م}}}{\text{م}}$ ہی اسی معلوم ہوا کہ $\frac{\text{ص}_{\text{م}}}{\text{م}}$ = امثال $\frac{1}{\text{لا}^{\text{م}}}$ کے جو صورت مفصلہ $-\text{لوگ}\,\frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا}^{\text{ن}}}$ مین ہے اور یہہ صورت مفصلہ قوائے متنازلہ لا مین لکھی گئی ہو

اسمین م مثبت فرض کیا گیا ہی اگر قوائے منفی صحیحہ کا حاصل جمع دریافت کرنا منظور ہو تو لا کو $\frac{1}{\text{لا}}$ سے بدل دو اور مساوات ر کی قیمتون کی مثبت قوائے کا مجموعہ اس مساوات مین دریافت کرو

(۲۶۱) تمثیلاً مساوات $\text{لا}^2 - \text{ع}\,\text{لا} + \text{ق} = 0$ کی قیمتون کی م قوتون کا مجموعہ دریافت کرو

یہان $\frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا}^2} = 1-\left(\frac{\text{ع}}{\text{لا}}-\frac{\text{ق}}{\text{لا}^2}\right)$ و $-\text{لوگ}\,\frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا}^2} = -\text{لوگ}\left[1-\left(\frac{\text{ع}}{\text{لا}}-\frac{\text{ق}}{\text{لا}^2}\right)\right]$

$$= \frac{\text{ع}}{\text{لا}}-\frac{\text{ق}}{\text{لا}^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\text{ع}}{\text{لا}}-\frac{\text{ق}}{\text{لا}^2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{\text{ع}}{\text{لا}}-\frac{\text{ق}}{\text{لا}^2}\right)^3+\ldots+\frac{1}{\text{م}}\left(\frac{\text{ع}}{\text{لا}}-\frac{\text{ق}}{\text{لا}^2}\right)^{\text{م}}+\ldots$$

امثال کا $\frac{1}{\text{لا}^{\text{م}}}$ کے $-\text{لوگ}\,\frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا}^2}$ مین مختلف ارقام کے منتخب کرنی سی جنمین لا واقع ہو حاصل ہو سکتی ہین ان ارقام کو اگر بہ ترتیب معکوس لکھین تو

$$\frac{1}{\text{م}}\left(\frac{\text{ع}}{\text{لا}}-\frac{\text{ق}}{\text{لا}^2}\right)^{\text{م}}+\frac{1}{\text{م}-1}\left(\frac{\text{ع}}{\text{لا}}-\frac{\text{ق}}{\text{لا}^2}\right)^{\text{م}-1}+\frac{1}{\text{م}-2}\left(\frac{\text{ع}}{\text{لا}}-\frac{\text{ق}}{\text{لا}^2}\right)^{\text{م}-2}+\ldots$$

اسکے واسطے امثال $\frac{1}{لا^م}$ یہہ ہین کہ

$\frac{1}{م}ع^م - \frac{م}{١} \frac{1}{م-١} ع^{م-٢} ق + \frac{م}{٢} \frac{(م-٢)(م-٣)}{١ \times ٢} ع^{م-٤} ق^٢ - ...$

پس $ص_م = ع^م - م ع^{م-٢} ق + م \frac{(م-٣)}{١ \times ٢} ع^{م-٤} ق^٢ - ...$

$+ (-١)^ر \frac{م (م-ر-١) ... (م-٢ر+١)}{ر} ع^{م-٢ر} ق^ر + ...$

فرض کرو کہ ق = ا تو مساوات درجہ دوم مساوی تکانیہ ہوگی اور اوسکی قیمتین ا اور $\frac{1}{ا}$ کی موجب ... کے دفعہ ۱۳۳ کے ہونگین

پس ہم $ا + \frac{1}{ا} = ع$ رکھین تو

$ا^م + \frac{1}{ا^م} = ع^م - م ع^{م-٢} + \frac{م (م-٣)}{١ \times ٢} ع^{م-٤}$

$+ (-١)^ر \frac{م (م-ر-١) ... (م-٢ر+١)}{ر} ع^{م-٢ر} + ...$

پس ہم نے ایک جملہ بنانیہ علی العموم $ا^م + \frac{1}{ا^م}$ کے واسطے ایسا حاصل کیا جسمین ارقام $ا + \frac{1}{ا}$ کی قوتین ہین دفعہ ۱۳۸ دیکھو

(۲۶۲) اب پہر یہہ فرض کرو کہ مساوات $لا^ن - ١ = ٠$ کی قیمتون کی م قوتون کا حاصل جمع دریافت کرنا مطلوب ہے

یہان $\frac{ح (لا)}{لا^ن} = ١ - \frac{1}{لا^ن}$

∴ لوگ $\frac{ح (لا)}{لا^ن} = \frac{1}{لا^ن} + \frac{1}{٢ لا^{٢ن}} + \frac{1}{٣ لا^{٣ن}} + \frac{1}{٤ لا^{٤ن}} + ...$

یہان امثال $\frac{1}{لا^م}$ کے صفر ہین بشرطیکہ م اضعاف ن کا نہ ہو اور تب امثال $\frac{ن}{م}$ ہونگی اور

پس $ص_م = ٠$ بشرطیکہ م اضعاف ن کا نہ ہو اور اگر یہہ ہو گا تو $ص_م = ن$

یہہ نتیجہ بڑی کام کا ہی دفعات اینده مین اوسکی تین استعمال بیان کرینگے

(۲۶۳) اب ہم یہہ بتلائینگے کہ ایک سلسلہ معلوم کی خاص منتخب رقمون کا حاصل جمع کسطرح دریافت کرتی ہین

فرض کرو کہ $ح (لا) = ا_. + ا_١ لا + ا_٢ لا^٢ + ...$ لا انتہا اور مطلوب یہہ ہی کہ اس سلسلہ

$ا_م لا^م + ا_{م+ن} لا^{م+ن} + ا_{م+٢ن} لا^{م+٢ن} + ...$ لا انتہا

کا حاصل جمع دریافت کرین

فرض کرو کہ سہ و صہ و لر . . . ن مرتبتی کی نزول واحد کی ہین یعنی ن قیمتین مساوات $\text{لا}^{\text{ن}} - ١ = ٠$ کی ہین اس مطابقہ کی طرفین کو $\text{سہ}^{\text{ن}-\text{م}}$ مین ضرب دو اور لا کو سہ لا سے بدل دو تو

$$\text{سہ}^{\text{ن}-\text{م}}\,\text{ح}(\text{سہ لا}) = ا_٠\,\text{سہ}^{\text{ن}-\text{م}} + ا_١\,\text{سہ}^{\text{ن}-\text{م}+١}\,\text{لا} + ا_٢\,\text{سہ}^{\text{ن}-\text{م}+٢}\,\text{لا}^٢ + \dots$$

اور اسیطرح

$$\text{صہ}^{\text{ن}-\text{م}}\,\text{ح}(\text{صہ لا}) = ا_٠\,\text{صہ}^{\text{ن}-\text{م}} + ا_١\,\text{صہ}^{\text{ن}-\text{م}+١}\,\text{لا} + ا_٢\,\text{صہ}^{\text{ن}-\text{م}+٢}\,\text{لا}^٢ + \dots$$

$$\text{لر}^{\text{ن}-\text{م}}\,\text{ح}(\text{لر لا}) = ا_٠\,\text{لر}^{\text{ن}-١} + ا_١\,\text{لر}^{\text{ن}-\text{م}+١}\,\text{لا} + ا_٢\,\text{لر}^{\text{ن}-\text{م}+٢}\,\text{لا}^٢ + \dots$$

اور علی ہذا القیاس

اب یہہ جو ن مطابقہ اسطرح بنائے جاوین اونکو جمع کرو تو بائین طرف ن گنا سلسلہ مطلوبکا بموجب دفعہ ٢٦٢ کے حاصل ہوگا پس

$$ا_\text{م}\,\text{لا}^\text{م} + ا_{\text{م}+\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{م}+\text{ن}} + ا_{\text{م}+٢\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{م}+٢\text{ن}} + \dots$$

$$= \frac{١}{\text{ن}} \left\{ \text{سہ}^{\text{ن}-١}\,\text{ح}(\text{سہ لا}) + \text{صہ}^{\text{ن}-\text{م}}\,\text{ح}(\text{صہ لا}) + \text{لر}^{\text{ن}-\text{م}}\,\text{ح}(\text{لر لا}) + \dots \right\}$$

(٢٦٤) اب دفعہ ٢٦٢ کی استعانت سے ہم یہہ مسئلہ ثابت کرسکتے ہین کہ جملہ $(\text{لا}+\text{ی})^{\text{ن}} - \text{لا}^{\text{ن}} - \text{ی}^{\text{ن}}$ پورا $\text{لا}^٢ + \text{لا ی} + \text{ی}^٢$ پر تقسیم ہوسکتی ہے اگر ن طاق صحیح عدد ہو اور ٣ پر پورا تقسیم نہ ہوتا ہو اور وہ $(\text{لا}^٢ + \text{لا ی} + \text{ی}^٢)^٢$ پر پورا تقسیم ہوگا اگر ن مثبت صحیح اس صورت ٦م + ١ کا ہو

فرض کرو کہ ١ و سہ و صہ واحد کی تین جزر المکعب ہین یعنی مساوات $\text{لا}^٣ - ١ = ٠$ کی تین قیمتین ہین تو حاصل ضرب ان تین قیمتوں کا بموجب دفعہ ٢٤٥ کے ١ ہے

یعنی بموجب دفعہ ٢٤٥ کے سہ صہ = ١ اور بموجب دفعہ ٢٦٢ کی $١ + \text{سہ}^\text{م} + \text{صہ}^\text{م} = ٠$

بشرطیکہ م اضعاف ٣ کا نہ ہو

پس $\text{لا}^٢ + \text{لا ی} + \text{ی}^٢ = (\text{لا} - \text{سہ ی})(\text{لا} - \text{صہ ی})$

اسی معلوم ہوا کہ $(\text{لا}+\text{ی})^{\text{ن}} - \text{لا}^{\text{ن}} - \text{ی}^{\text{ن}}$ پورا تقسیم $\text{لا}^٢ + \text{لا ی} + \text{ی}^٢$ پر ہوتا ہے بشرطیکہ وہ لا = سہ ی سے اور لا = صہ ی سے معدوم ہوتا ہے اور وہ پورا $(\text{لا}^٢ + \text{لا ی} + \text{ی}^٢)^٢$ پر تقسیم ہوتا ہے بشرطیکہ اوسکا جملہ مشتقہ $\text{ن}(\text{لا}+\text{ی})^{\text{ن}-١} - \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-١}$ معدوم لا = سہ ی سے اور

لا = صہ ی سے معدوم ہوتا ہو

جب لا = سہ ی تو ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے

$$(لا + ی)^{ن} - لا^{ن} - ی^{ن} = ی^{ن} \left[(۱ + سہ)^{ن} - سہ^{ن} - ۱ \right] = ی^{ن} \left[(- صہ)^{ن} - سہ^{ن} - ۱ \right]$$

اور یہہ معدوم ہوتا ہے جب ن طاق ہو اور پورا ۳ پر نہ تقسیم ہوتا ہو

اور نیز جب لا = سہ ی

$$ن (لا + ی)^{ن-۱} - ن لا^{ن-۱} = ن ی^{ن-۱} \left[(۱ + سہ)^{ن-۱} - سہ^{ن-۱} \right] = ن ی^{ن-۱} \left[(- صہ)^{ن-۱} - سہ^{ن-۱} \right]$$

یہہ معدوم ہوتا ہی اگر ن - ۱ جفت صحیح ہو اور اضعاف ۳ کا ہو کیونکہ $سہ^{۳} = ۱$ اور $صہ^{۳} = ۱$

اور اگر ن - ۱ جفت صحیح ہو اور اضعاف ۳ کا ہو تو یہہ استخراج ہوتا ہے کہ ن طاق صحیح ہے اور ۳ پر تقسیم نہیں ہوتا پس $(لا + ی)^{ن} - لا^{ن} - ی^{ن}$ بھی معدوم ہوتا ہے اور یہی نتیجہ حاصل ہو سکتا ہی اگر صہ ی کو بجای لا کے رکھیں

(۲۶۵) اب آخر استعمال دفعہ ۲۶۲ کا یہہ ہی کہ ہم اس مسئلہ کو ثابت کریں فرض کرو کہ اس سلسلہ

$$۱ - \frac{ن - ۳}{۲} + \frac{(ن - ۴)(ن - ۵)}{\lfloor ۳} - \frac{(ن - ۵)(ن - ۶)(ن - ۷)}{\lfloor ۴} + \ldots$$

$$+ (-۱)^{ر-۱} \frac{(ن - ر - ۱)(ن - ر - ۲) \ldots (ن - ۲ ر + ۱)}{\lfloor ر} + \ldots$$

کا حاصل جمع ص ہے تو

ص = $\frac{۳}{ن}$ اگر ن طاق مثبت صحیح پورا ۳ پر تقسیم ہوتا ہو

ص = ۰ اگر ن طاق مثبت صحیح پورا ۳ پر نہ تقسیم ہوتا ہو

ص = $\frac{۱}{ن}$ اگر ن جفت مثبت صحیح پورا ۳ پر تقسیم ہوتا ہو

ص = $\frac{۲}{ن}$ اگر ن جفت مثبت صحیح پورا ۳ پر نہ تقسیم ہوتا ہو

دفعہ ۲۶۱ میں لا ی کو بجای ق کی اور لا + ی کو بجای ع کی رکھو تو $س_{ن} = لا^{ن} + ی^{ن}$

پس اگر ن مثبت صحیح ہے

$$(لا + ی)^{ن} - لا^{ن} - ی^{ن} = ن لا ی (لا + ی) \left[(لا + ی)^{ن-۳} - \frac{ن - ۳}{۲} لا ی (لا + ی)^{ن-۵} + \frac{(ن - ۴)(ن - ۵)}{\lfloor ۳} (لا ی)^{۲} (لا + ی)^{ن-۷} \ldots \right] \ldots (۱)$$

فرض کرو کہ ا و سہ و صہ واحد کے تین جزر کعب ہوں لا = سہ ی کی رکھو (ا) کی بائیں طرف کا رکن یہہ ہو جایگا کہ

ن سہ (ا + سہ) یٰ [(ا + سہ)ن-۳ - (ن - ۳)/۲ سہ (ا + سہ)ن-۵ + ((ن-۴)(ن-۵)/۳!) سہ۲ (ا + سہ)ن-۷ ...]

لیکن سہ صہ = ا اور اسیواسطی صہ۲ = سہ صہ۳ = سہ اور سہ + صہ + ا = ۰

پس - صہ = سہ + ا پس سہ = (سہ + ا)۲ اسی معلوم ہوا کہ بائیں طرف کا رکن (ا) کا متبدل ہو کر یہہ ہوگا کہ

ن (ا + سہ)ن یٰ [ا - (ن - ۳)/۲ + ((ن - ۴)(ن - ۵))/۳! - ...]

یعنی ن (- صہ)ن یٰ ص

اور نیز جب لا = سہ ی تو دائیں طرف کا رکن مساوات کا یہہ ہو جایگا کہ

یٰ [(ا + سہ)ن - سہن - ا] یعنی یٰ [(- صہ)ن - سہن - ا]

اسیواسطی (- صہ)ن - سہن - ا = ن (- صہ)ن ص (۲)

اگر ن طاق صحیح پورا ۳ پر تقسیم ہوتا ہی تو دائیں طرف کا رکن (۲) کا برابر - ۳ کے بموجب دفعہ ۲۶۲ کی ہی اور اسیواسطی - ۳ = - ن صہن ص = - ن ص اسیواسطی ص = ۳/ن

اگر ن طاق صحیح ہی اور ۳ پر پورا نہیں تقسیم ہوتا ہی تو دائیں طرف کا رکن (۲) کا صفر ہے بموجب دفعہ ۲۶۲ کے ہے اور اسیواسطے ص = ۰

اگر ن جفت صحیح ہی اور ۳ پر پورا تقسیم ہوتا ہی تو دائیں طرف کا رکن (۲) کا - ا ہے اور بائیں طرف کا رکن ن ص ہی اسیواسطی ص = - ا/ن

اگر ن جفت صحیح ہی اور ۳ پر پورا نہیں تقسیم ہوتا تو دائیں طرف کا رکن صہن - سہن - ا ہی یعنی ۲ صہن کیونکہ سہن + صہن + ا = ۰ پس ۲ صہن = ن صہن ص اور اسیواسطی ص = ۲/ن

اس بات پر بھی خیال کرنا چاہیئی کہ سلسلہ جو ص کی تعبیر ہوتا ہی اوسمین محدود تعداد رقموں کی ہے اور فی الحقیقت اگر ن = ۲ م یا ۲ م + ا کے ہو تو م رقمیں سلسلہ میں ہونگیں

(۲۶۶) مساوات کی قیمتوں کے قوتوں کی مجموعوں کی قیمتوں کو مساوات کی تقریبی قیمت دریافت کرنے میں بھی کام میں لاتے ہیں اس ترکیب کا بیان ہم مرفی صاحب کے رسالہ مسائل معادلات سے نقل کرتے ہیں
فرض کرو کہ ا و ب و س . . . قیمتیں مساوات کی ہیں اور وہ سب حقیقی ہیں اور تعداد ا سب سے بڑی قیمت ہے

اب ہم کو یہہ حاصل ہے کہ

$$\frac{ص_{م+1}}{ص_م} = \frac{ا^{م+1} + ب^{م+1} + س^{م+1} + \cdots}{ا^م + ب^م + س^م + \cdots}$$

$$= ا \frac{1 + \left(\frac{ب}{ا}\right)^{م+1} + \left(\frac{س}{ا}\right)^{م+1} + \cdots}{1 + \left(\frac{ب}{ا}\right)^م + \left(\frac{س}{ا}\right)^م + \cdots}$$

اب اگر م کو بڑا کافی فرض کریں تو بائیں طرف کا رکن خاطر خواہ اکے قریب ہو سکتا ہے یعنی قریب سب سے بڑی عددی قیمت کے ہوتا ہے

(۲۶۷) اب ہم یہہ بیان کرتے ہیں کہ اگر دفعہ گذشتہ میں خیالی قیمتیں بھی ہوں تو اوسکی نتیجہ میں کیا ترمیم ہوگی فرض کرو کہ صہ + لہ $\sqrt{-1}$ اور صہ - لہ $\sqrt{-1}$ ایک زوج مزدوجہ خیالی قیمتوں کا ہو تو اوسکا مجموعہ ۲ صہ اور اوسکا حاصل ضرب صہ^2 + لہ^2 ہوگا اور یہہ حاصل ضرب مربع اونکی قالب کا ہی جبر و مقابلہ کا پچیسواں باب دیکھو

اب صہ ± لہ $\sqrt{-1}$ = لب $\left(\frac{صہ}{لب} \pm \frac{لہ}{لب}\sqrt{-1}\right)$

فرض کرو کہ $\frac{صہ}{لب}$ = جم بر اور $\frac{لہ}{لب}$ = جب بر

پس مس بر = $\frac{لہ}{صہ}$ اور لب^2 = صہ^2 + لہ^2

پس قالب ہی او مزدوج قیمتیں اس صورت میں لکھی جا سکتی ہیں کہ

لب (جم بر ± $\sqrt{-1}$ جب بر) اور ڈی مو ئور کے ضابطہ سے مجموعہ دو قیمتوں کی م قوتوں کا ۲ لب^م جم م بر ہے

پس اگر سب سے بڑی حقیقی قیمت کی عددی قدر بڑی خیالی قیمتوں کی قالب سے ہو تو $\frac{ص_{م+1}}{ص_م}$ لانہایت زیادہ ہوتے ہی ایک حد خاص کی طرف مائل ہوگی یعنی سب سے

بڑی قیمت کی طرف از روی تعداد کی لیکن اگر سب سے بڑی حقیقی قیمت کی مقدار ی خیالی قیمتوں کی قالب سی بڑی نہ ہو تو $\frac{ص_{م+۱}}{ص_م}$ کی کوئی حد غائی نہ ہوگی

(۲۶۸) مثال $لا^۳ - ۲لا - ۵ = ۰$ ۔ یہاں مسلسلہ $ص_۱$ و $ص_۲$ و $ص_۳$ . . .

۰ و ۴ و ۱۵ و ۸ و ۵۰ و ۹۱ و ۱۴۰ و ۴۳۲ و ۷۳۵ و ۱۵۶۴ و ۳۶۳۰ و ۶۸۰۳ و ۱۵۰۸۰ و ۳۱۷۵۶ و ۶۴۱۷۵ و ۱۳۸۹۱۲ و ۲۸۷۱۳۰ و ۵۹۸۶۹۹ . . . ہے

ہر ایک رقم کو اوسکی ماقبل کی رقم پر تقسیم کرتی ہیں تو یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ماحصل کو ایک سلسلہ ۲ کی حد کی طرف ہی اسی یہہ نتیجہ نکالتی ہیں کہ ایک حقیقی قیمت کچھہ بڑی ۲ سی ہی مگر یہہ مثال اس ترکیب کے واسطی مناسب نہیں ہی کیونکہ حاصل ضرب تمام قیمتوں کا ۵ ہی اور ایک حقیقی قیمت کچھہ زیادہ ۲ سے اور باقی دو قیمتوں کا حاصل ضرب تقریباً ۵ر۲ ہی یہہ دو قیمتیں بموجب دفعہ ۱۷۲ کے خیالی ہیں اور چونکہ اونکا قالب اونکی حاصل ضرب کا جذر ہی تو قالب بڑا بہ نسبت ۵ر۱ کے ہوا پس قالب بمقابلہ حقیقی قیمت کی بہت چھوٹا نہیں ہی پس جملہ $\frac{ص_{م+۱}}{ص_م}$ اہستہ اہستہ ایک حد غائی کی طرف پہونچتا ہے

(۲۶۹) دفعہ ۲۶۶ کے ترکیب کی مماثل ایک ترکیب ہے جس کی تعداد سب سی بڑی دو قیمتوں کا حاصل ضرب خاص صورتوں میں معلوم ہوجاتا ہے

اسواسطی کہ $ص_م = ا^م + ب^م + س^م + \cdots$

$$ص_{م+۱} = ا^{م+۱} + ب^{م+۱} + س^{م+۱} + \cdots$$

$$ص_{م+۲} = ا^{م+۲} + ب^{م+۱} + س^{م+۱} + \cdots$$

اسواسطے $ص_م ص_{م+۲} - ص^۲_{م+۱} = ا^م ب^م (ا-ب)^۲ + ا^م س^م (ا-س)^۲$

$$+ ب^م س^م (ب-س)^۲ + \cdots$$

اسکو لوم سے تعبیر کرو تو

$$لوم = ا^م ب^م (ا-ب)^۲ \left[۱ + \frac{س^م}{ب^م} \left(\frac{ا-س}{ا-ب}\right)^۲ + \frac{س^م}{ا^م} \left(\frac{ب-س}{ا-ب}\right)^۲ + \cdots \right]$$

اب بموجب دفعہ ۲۶۶ و ۲۶۷ کے عمل کرنے سے ہم کو نتایج مفصلہ ذیل حاصل ہونگے

(۱) اگر سب حقیقی قیمتین ہین تو $\frac{\text{لو}_{\text{م}+۱}}{\text{لو}_{\text{م}}}$ کو خاطر خواہ م کی زیادہ کرنے سے تعداداً دو سب سے بڑی قیمتون کے حاصل ضرب کے قریب لا سکتی ہین

(۲) اگر حقیقی قیمتین تعداداً بڑی کسی خیالی قیمت کی قالب سے ہی تو $\frac{\text{لو}_{\text{م}+۱}}{\text{لو}_{\text{م}}}$ کی حد غائی ہوگی یعنی ان قیمتون مین سے سب سے بڑی دو قیمتون کا حاصل ضرب

(۳) اگر تعداداً سب سے دو بڑی قیمتون کی حاصل ضرب کی جذر سے خیالی قیمتون کا قالب بڑا ہے تو $\frac{\text{لو}_{\text{م}+۱}}{\text{لو}_{\text{م}}}$ کی حد غائی کی قیمت ہوگی یعنی مجذور اوس قالب کا ہوگا یعنی حاصل ضرب اون خیالی قیمتون کے حاصل ضرب کا جنکا وہ قالب تھا

(۴) پس صرف ایک صورت جسمین $\frac{\text{لو}_{\text{م}+۱}}{\text{لو}_{\text{م}}}$ سے حد غائی کی نہ ہونی کا نقص عاید ہوتا ہے یہہ ہی کہ ایک صرف حقیقی قیمت ہو اور خیالی قیمتون کی سب سے بڑی قالب سے تعداداً بڑی ہو اس صورت مین حقیقی قیمت موافق دفعہ ۲۶۷ کے دریافت ہو جاتی ہے

(۲۷۰) بعض صورتون مین اسی ترکیب کے متماثل ترکیب سے حاصل جمع یہی دو قیمتون کا دریافت کر لیتے ہیں
$\text{ص}_{\text{م}}$ و $\text{ص}_{\text{م}+۱}$ و $\text{ص}_{\text{م}+۲}$ اور $\text{ص}_{\text{م}+۳}$ کی قیمتون سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ص}_{\text{م}}\,\text{ص}_{\text{م}+۳} - \text{ص}_{\text{م}+۱}\,\text{ص}_{\text{م}+۲} = \text{ا}^{\text{م}}\text{ب}^{\text{م}}(\text{ا}+\text{ب})(\text{ا}-\text{ب})^۲ + \text{ا}^{\text{م}}\text{س}^{\text{م}}(\text{ا}+\text{س})(\text{ا}-\text{س})^۲ + \text{ب}^{\text{م}}\text{س}^{\text{م}}(\text{ب}+\text{س})(\text{ب}-\text{س})^۲ + \dots$$

اب اسکو مع م سے تعبیر کرو پس مع م کی معنی تو دفعہ گزشتہ مین مقرر ہو گئی ہین اب ہم یہان یہہ دریافت کرینگے $\frac{\text{مع}_{\text{م}+۱}}{\text{مع}_{\text{م}}}$ کی ایک حد غائی اون صورتون مین ہی جنکا ذکر اوپر کی دفعہ مین ہوا اور یہہ حد غائی مجموعہ تعداداً سب سے بڑی دو قیمتون کا ہی یا مجموعہ دو خیالی قیمتون کا ہی جنکا قالب سب سے بڑا ہے

(۲۷۱) پس دفعہ ۲۶۹ کی (۱) و (۲) و (۳) صورتون مین حاصل ضرب دو قیمتون کا بموجب دفعہ ۲۶۹ کی اور اونکا مجموعہ بموجب دفعہ ۲۷۰ کے حاصل ہو سکتا ہے اور (۱) اور (۲) کی صورتون مین بموجب دفعہ ۲۷۰ کی دو قیمتون کا مجموعہ معلوم ہو سکتا ہے

اور دفعہ ۲۶۶ کے اونمین سی بڑی قیمت معلوم ہوسکتی ہے

(۲۷۲) مثال لا^۴ + لا^۳ + ۴لا^۲ - ۴لا + ۱ = ۰

یہان بتفصیل ذیل قیمتین حاصل ہوتی ہین

ارقام ص۱ و ص۲ ۰ ۰ ۰ کے واسطے

-۱ و -۷ و ۲۳ و -۳ و -۱۱۴ و ۲۲۶ و ۲۰۲ و -۱۵۷۱ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰

ارقام لو۱ و لو۲ و ۰ ۰ ۰ کے واسطے

-۲ و -۷۲ و -۸۰۵ و -۲۶۷۷ و -۱۴۱۳۷ و -۷۴۹۹۱ و -۳۹۷۴۲۱ ۰ ۰ ۰

اور ارقام مو۱ و مو۲ ۰ ۰ کے واسطے

۱۴۴ و ۸۸۱ و ۴۸۷۳ و ۲۵۷۲۶ و ۱۳۶۳۸۲ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰

اب یہان سلسلہ ص۱ و ص۲ ۰ ۰ ۰ مین ایک رقم کو ماقبل کی رقم پر تقسیم کرنی سی ایک محدود خارج قسمت نہین حاصل ہوتی ہی ہم کو یہہ قطعی معلوم ہوتا ہی کہ مساوات کی خیالی قیمتین ہین اور سلسلہ لو۱ و لو۲ ۰ ۰ ۰ کو اپنی ماقبل کی رقم پر تقسیم کرنی سی وہ خارج قسمت حاصل ہوتی ہین جنسی معلوم ہوتا ہے کہ دو قیمتون کی حاصل ضرب کی قدر ۵٫۳۰ ہی اور سلسلہ مو۱ و مو۲ ۰ ۰ ۰ کی ہر ایک رقم سلسلہ لو۱ و لو۲ ۰ ۰ ۰ کی ہر ایک رقم متناظر پر تقسیم کرنے سی وہ خارج قسمت حاصل ہوتی ہین جنسی معلوم ہوتا ہی کہ مجموعہ ان دو قیمتون کا - ۱٫۸۱۹ ہے

پس ان دو قیمتون سی ہم دو خیالی قیمتین تقریباً دریافت کرسکتی ہین

اور چونکہ مساوات کی لئی چارون قیمتون کا مجموعہ - ۱ ہی اور اوسکا حاصل ضرب ۱ ہی تو مجموعہ باقی دو قیمتون کا وغیرہ ۸۱۹٫ ہی اور اوسکا حاصل ضرب وغیرہ $\frac{۱}{۵٫۳۰}$ ہی اسواسطی یہہ دو قیمتین بہی خیالی ہین

پس اسطرح ہم کو یہہ معلوم ہوگا کہ خیالی قیمتون کے اول زوج کا قالب پانچ گنہ دوسرے خیالی قیمتون کے زوج کی قالب سی ہی اسی معلوم ہوا کہ بموجب طریقہ کتابت دفعہ ۲۷۰ کے ہم کو دریافت

دریافت ہوگا کہ لو م = ا م ب م (ا - ب)^۲ اب اور ارقام کو چھوڑ دین تو غلطی بقدر
$\frac{1}{5^{م}}$ حصہ کل کی قریب واقع ہوگی اور اسی ہم اپنی نتیجہ کی صحت کا اندازہ کر سکتی ہین
مثلاً ہم نی اوپر قیمتین لو ا کی لو ہ اور لو ۲ تک لکھی ہین تو حاصل ضرب کے دریافت کرنے
مین غلطی قریب ($\frac{1}{5^5}$) وین حصہ کل کے واقع ہوگی

بائیسوان باب دور کرنا مقادیر مجہول کا یعنی اسقاط

(۲۷۳) فرض کرو کہ دو ہمزاد مساواتین دو مجہول کی ہم کو حل کرنی ہین بعض صورتین ایسی ہوتی ہین
کہ جنمین اونکا حل کرنا نہایت آسان ہوتا ہی فرض کرو کہ لا اور ی مقادیر مجہول کو تعبیر کرتی ہین
پس اگر ایک مساوات مین لا ملتف ہو اور کوئی اور قوت لا کی نہ ملتف ہو تو اس مساوات سی لا کی
قیمت ی کی رقموں مین دریافت کرین اور اوسکو دوسری مساوات مین مندرج کرین تو ایک مساوات
حاصل ہو جائیگی جسمین فقط مقدار مجہول ی ہی ملتف ہوگی اور اوسکی قیمتین تقریبی یا تحقیقی اون
ترکیبون سی دریافت ہونگیں جو اوپر بیان ہوئین

اب پہر فرض کرو کہ مساواتین ا = ۰ ب = ۰ سی تعبیر ہوتی ہین اور ا اور ب
جلدی سے اجزا ضربی مین تحلیل ہو سکتی ہین مثلاً فرض کرو کہ ا = لو لو َ لوً اور ب = صو صوَ
تو معادلات مفروضہ کی تمام حل ان ہمزاد مساواتونکے حل کرنی سی حاصل ہونگی کہ لو = ۰ صو = ۰
لو = ۰ اور صوَ = ۰ لوَ = ۰ اور صو = ۰ . و لوَ = ۰ اور
صوً = ۰ اور لوً = ۰ اور صو = ۰ اور لوً = ۰ اور صوَ = ۰ پس حل معادلات مفروضہ
کا اون معادلات کی حل پر موقوف ہوا جو معادلات مفروضہ سی درجہ کم رکھتی ہین
یہہ ہو سکتا ہی کہ ا کے اجزا ضربی مین سی ایک ب کی اجزا ضربی مین سی ایک ساتہہ بالکل مطابق ہو
مثلاً فرض کرو کہ لو اور صو متطابق ہین تو کوئی سی قیمتین لا اور ی کی جو مساوات لو = ۰ کی شرائط کو
پورا کرینگی وہ ہمزاد مساوات ا = ۰ اور ب = ۰ کی شرائط کو بہی پورا کرینگے
پس اگر لو مین لا اور ی دونو ملتف ہین تو ہم مقادیر مجہول مین سی ایک کیواسطی جو قیمت چاہیں

مقرر کریں اور دوسرے قیمت اوسکی مطابق نکال لیں اور اسطرح سی جتنی حل چاہیں دریافت کریں
گر لو میں ایک مقدار مجہول مقادیر مجہولہ میں سی ملتف ہو تو ہم معادلات
ا = ۰ اور ب = ۰ کی شرائط کو پورا اوس مقدار مجہول کے اوس قیمت سی کر سکتی ہیں
جو مساوات لو = ۰ سی مستنبط ہو اور دوسری مقدار مجہول کی واسطی خواہ کچھ ہی قیمت مقرر کریں

(۲۷۴) ہم نی ابھی بیان کیا ہی کہ دو مقادیر مجہول کی دو مساواتوں سی کسطرح مسائل جملہ بالقرینہ کے استعانت سی ہم ایک مجہول مقدار کو دور کرتی ہیں اور ایک مساوات دوسرے مقدار مجہول کی حاصل کرتی ہیں اب ہم مقدار مجہول کی دور کرنی کی ایک اور ترکیب بیان کرتی ہیں وہ دو جبریہ جملوں کے دفق اعظم دریافت کرنی کی عمل پر موقوف ہی

(۲۷۵) فرض کرو کہ دو ہمزاد مساواتیں ح (لا و ر) = ۰ اور ح۲ (لا و ر) = ۰ سے تعبیر کی جائیں اور لا = سہ اور ر = صہ کی ایسی قیمتیں ہوں کہ اونسی امساوات کی شرائط پوری ہوتی ہوں تو مساوات ح (لا و صہ) = ۰ اور ح۲ (لا و صہ) = ۰ کی شرائط لا = سہ سی پوری ہونگیں اسی معلوم ہوا کہ ح (لا و صہ) و ح۲ (لا و صہ) کا ایک دفق مشترک ہوا اور یہہ دفق مشترک ایسا ہو کہ جب اوسکو برابر صفر کی لکھیں تو اوسی قیمتیں سہ کی ہاتھہ لگ جائیں اور نیز وہ قیمت یا قیمتیں حاصل ہو جائیں جو ر = صہ کی ساتھہ شریک ہو کر معادلات مفروضہ کی شرائط کو پورا کریں

پس فرض کرو کہ ح (لا و ر) اور ح۲ (لا و ر) کی لا کی قوا متنازلہ کی ترتیب سی لکھیں اور حسب معمول اوسکا دفق اعظم دریافت کریں اور یہانتک عمل کریں کہ اخر کو ایک جملہ ر کا باقی ہیں حاصل ہوا اوسکا ح (ر) نام رکھو تو کوئی ایسی قیمت ر کی داخل ہونی کی قابل نہیں ہوگی جب تک کہ ح (ر) = ۰ کی نہ کری اسواسطی کہ اگر ح (ر) معدوم نہ ہو تو ح (لا و ر) و ح۲ (لا و ر) کا کوئی دفق مشترک نہیں ہوتی کا اسواسطی وہ ایک ہی وقت معدوم نہیں ہونگے ـ مگر اسکے بالعکس درست نہیں کہ ہر ایک قیمت ر جو ح (ر) کو فنا کرتی ہی وہ ضرور داخل ہونی کی قابل ہے

اسواسطی کہ اثناء عمل میں یہہ واقع ہو سکتا ہی کہ بعض قواء لا کی امثال مکسور ہوں جنکی نسب نمایوں میں ی ملتف ہو اور ایک قیمت جو مساوات مح (ی) = ۰ کی شرایط کو پورا کرتی ہو ان نسب نمایوں کو معدوم کر دی اور اسطرح سی لا انتہا اور غیر المعین مقادیر داخل کر دی

مثلاً فرض کرو کہ ہم کو یہہ حاصل ہے کہ

ح۱ (لا و ی) = ق ح۲ (لا و ی) + مح (ی)

پس اگر ق ایک جملہ صحیحہ ہی تو وہ ی کی کسی محدود قیمت سی غیر متناہی ہوگا اور کوئی قیمت ی کی جو مح (ی) کو معدوم کرتی ہی وہ اوس لا کی قیمت کی ساتھہ شامل ہو کر جو مساوات ح۲ (لا و ی) = ۰ سی مواقف اس ی کی قیمت کی نکلتی ہی ح۱ (لا و ی) کو معدوم کریگی لیکن اگر ق کسر ہو اور اوسکی نسب نما میں ی ملتف ہو تو جب مح (ی) معدوم ہو تو ق غیر متناہی ہو سکتا ہے اور کچھہ ضرور نہیں کہ ح۱ (لا و ی) معدوم ہو جب مح (ی) = ۰ اور ح۲ (لا و ی) = ۰ یہہ صورت مستثنیٰ اوس حالت میں بھی ہو سکتی ہی کہ ہم عمل حسب دستور کریں اور ایسی اجزاء ضربی داخل کریں کہ امثال کسور سی بچ جائیں مثلاً فرض کرو کہ ہم ح۱ (لا و ی) کو کسی مقدار س میں ضرب دیتے ہیں تاکہ ہم اون امثال مکسور سی بچ جائیں جو ی کے جملے ہیں اور اب ہم فرض کرتے ہیں کہ

س ح۱ (لا و ی) = ق ح۲ (لا و ی) + مح (ی)

اب اگر ی کو مساوات مح (ی) = ۰ سی دریافت کریں اور یہہ مساوات ح۲ (لا و ی) = ۰ سے دریافت کریں تو جو قیمت اسطرح حاصل ہونگی وہ ضرور س ح۱ (لا و ی) کو معدوم کرینگے مگر اس سی یہہ نہیں نکلتا کہ ح۱ (لا و ی) معدوم ہوتا ہے کیونکہ یہہ ہو سکتا ہی کہ جو قیمت ی کی ہم نے لی وہ س کو معدوم کرے

اس سی معلوم ہوا کہ ایک قاعدہ کی ضرورت ہی جس سی یہہ معلوم ہو کہ کون سی حل مساواتوں میں داخل ہونی کی قابل ہیں اب ہم اوس قاعدہ کو بتلاتی ہیں — ہم یہہ فرض کرتی ہیں کہ قوت مشترک اعظم کی دریافت کرتی ہیں حسب دستور اس باب میں احتیاط کی گئی ہی کہ امثال مکسور نہ واقع ہوں

ہم یہہ فرض کر سکتی ہین کہ ایسا وایتن جو ا = ۰ ا د ب = ۰ تعبیر کرتے ہین اوسمین نہ ا اور نہ ب مین کوئی جز ضربی ایسا واقع ہی کہ وہ صرف ء ہی کا جملہ ہو کیونکہ ایسا جملہ کا ہم جداگانہ خیال کر سکتی ہین اور جو حل اوسپر موقوف ہون وہ دریافت کر سکتے ہین جو ترکیب ہم اب لکھتی ہین وہ لابیطی صاحب اور سارس صاحب نی ایجاد کی تہی اوسکو میر جو کوئرٹ کے جبر مقابلہ سی نقل کرتی ہین

(۲۷۶) فرض کرو کہ دو ہمزاد مساواتین ا = ۰ اور ب = ۰ سی تعبیر ہوتی ہین اور یہہ بہی ہم فرض کرتی ہین کہ نہ ا ایسا ہی نہ ب ایسی ہی کہ اوسمین کوئی جز ضربی ایسا واقع ہو کہ وہ صرف ء کا جملہ ہو اور س وہ جز ضربی ہی جسکو ا مین اسلئی ضرب دیتی ہین کہ وہ ب پر تقسیم ہو فرض کرو کہ ق خارج قسمت نکلتا ہی اور ر باقی بچتی ہی جسمین ر جملہ صرف ء کا ہی فرض کرو کہ س۱ وہ جز ضربی جسکو ب مین اسلئی ضرب دیتی ہین کہ وہ ر پر تقسیم ہو فرض کرو کہ اس تقسیم کرنی مین ق۱ خارج قسمت نکلتا ہی اور ر۱ باقی بچتی ہی اور اسمین ر۱ صرف ء کا جملہ ہے اسی طرح عمل کئی جاؤ اور تمثیلاً فرض کرلو کہ چوتہی تقسیم پر ہم کو ایک ایسی باقی حاصل ہوتی ہے کہ جسمین لا داخل نہین ہی اور اوسکو ہم ر۳ سی تعبیر کرتی ہین بس مطابقی ذیل ہم کو حاصل ہونگے

س ا = ق ب + ر
س۱ ب = ق۱ ر + ر۱
س۲ ر = ق۲ ر۱ + ر۲ . . . . (۱)
س۳ ر۱ = ق۳ ر۲ + ر۳

فرض کرو کہ د دفق اعظم س اور ر کا ہی اور د۱ دفق اعظم (س س۱)/د اور ر۱ کا ہے اور د۲ دفق اعظم (س س۱ س۲)/(د د۱) اور ر۲ کا ہی اور د۳ دفق اعظم (س س۱ س۲ س۳)/(د د۱ د۲) اور ر۳ کا

اب ہم یہہ ثابت کرینگے کہ معادلات ا = ۰ اور ب = ۰ کے حل ان نظموں کے حل کرنے سے حاصل ہونگے

$$\left.\begin{array}{l} \frac{ب}{د} = ۰ \text{ اور } ل = ۰ \\ \frac{ب_۱}{د_۱} = ۰ \text{ اور } ر = ۰ \\ \frac{ب_۲}{د_۲} = ۰ \text{ اور } ر_۱ = ۰ \\ \frac{ب_۳}{د_۳} = ۰ \text{ اور } ر_۲ = ۰ \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (۲)$$

اول ہی ہم یہہ ثابت کرتی ہین کہ تمام حل جو معادلات (۲) سی حاصل ہونگی اونسی معادلات ا = ۰ اور ل = ۰ کی شرائط پوری ہونگین اور دوئم ہم یہہ ثابت کرینگے کہ تمام قیمتین جو لا اور ی کی معادلات ا = ۰ اور ل = ۰ کی شرائط کو پورا کرتی ہین وہ نظم (۲) کے حلوت مین داخل ہونگین

اول متطابقہ (۱) کے دونو ارکان کو د پر تقسیم کرو تو

$$\frac{س}{د} ا = \frac{ق}{د} ل + \frac{ب}{د} ر \quad (۳)$$

اب بموجب فرض کی $\frac{س}{د}$ اور $\frac{ب}{د}$ دونو جملی صحیحہ کی ہین پس $\frac{ق ل}{د}$ بہی جملہ صحیحہ ہوا لیکن بموجب فرض کی ل کا کوئی جز ضربی ایسا نہین ہی کہ وہ فقط د ہی کا جملہ ہو اسو اسطے ق کو د پورا تقسیم کرتا ہے

متطابقہ (۳) سی ثابت ہوتا ہی کہ لا اور ی کی قیمتین جو معادلات $\frac{ب}{د} = ۰$ اور ل = ۰ کی شرائط کو پورا کرتی ہین وہ $\frac{س}{د}$ ا کو معدوم کرتی ہین لیکن $\frac{س}{د}$ اور $\frac{ب}{د}$ بموجب فرض کے کوئی جز ضربی رکہتی نہین اسلئی یہہ قیمتین ا کو بہی معدوم کرتی ہین پس اسی معلوم ہوا کہ معادلات $\frac{ب}{د} = ۰$ اور ل = ۰ کی تمام حل معادلات ا = ۰ اور ل = ۰ کی شرائط کو پورا کرتے ہین

اب پہر متطابقہ (۳) کی دو ارکان کو س، مین ضرب دو اور متطابقہ (۱) کے دوسرے مساوات سی س، ل کا مساوی لر حاصل ہوا وسکو س، ل کی جگہ رکہی تو

$$\frac{س س_۱}{د} ا = \frac{س_۱ ر + ق ق_۱}{د} ر + \frac{ق ب_۱}{د} ر_۱$$

جملہ $\frac{س_۱ ر + ق ق_۱}{د}$ ایک صحیح جملہ ہی اسو اسطی کہ ر اور ق پوری تقسیم د پر ہوتی ہین اور علاوہ برین یہہ جملہ د، پر بہی پورا لقسیم ہوتا ہی اسو اسطے کہ $\frac{س س_۱}{د}$ ا کو د، تقسیم کرتا ہے

اور د کو ر۱ پورا نہین تقسیم کرتا ہی د۲ پر تقسیم کرو اور اختصاراً بجای $\frac{ق۱}{د}$ کے
م اور $\frac{س۱ ر + ق ق۱}{د د۱}$ کے م ر رکہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{س س۱}{د د۱} ا = م ر ر' + \frac{ر۱}{د۱} م ر' \qquad (۴)$$

اب (۱) کے متطابقون مین دوسری کی دونو ارکان کو $\frac{س۱}{د}$ مین ضرب دو تو

$$\frac{س س۱}{د} ب = \frac{س ق۱}{د} ر + \frac{س۱}{د} ر۱ ر'$$

چونکہ د۱ تقسیم $\frac{س س۱}{د}$ اور ر۱ کو کرتا ہی تو وہ $\frac{س ق۱}{د}$ ر کو بہی تقسیم کریگا لیکن ر پورا د پر نہین تقسیم ہوتا ہی اسواسطی $\frac{س ق۱}{د}$ پورا تقسیم ہونا چاہیی د۱ پر تقسیم کرو اور اختصاراً $\frac{س۱}{د}$ کی جگہ
ن اور $\frac{س ق۱}{د د۱}$ کے جگہ ن۱ رکہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{س س۱}{د د۱} ب = ن۱ ر + \frac{ر۱}{د۱} ن ر' \qquad (۵)$$

(۴) اور (۵) متطابقون سی یہہ ثابت ہو کہ تمام قیمتین جو ر اور $\frac{ر۱}{د۱}$ کی اور ر' کو معدوم کرتی ہین وہ $\frac{س س۱}{د د۱}$ ا اور $\frac{س س۱}{د د۱}$ ب کو فنا کرتی ہین لیکن $\frac{س س۱}{د د۱}$ اور $\frac{ر۱}{د۱}$ مین کوئی جز ضربی مشترک نہین اسواسطے تمام حل معادلات $\frac{ر۱}{د۱}$ = ۰ اور ر' = ۰ بمساوات ا = ۰ اور ب = ۰ کی شرائط کو پورا کرتے ہین

اب متطابقہ (۴) کی دونو ارکان کو س۲ مین ضرب دو اور س۲ ر' کی جگہ اوسکا مساوی جو (۱) کے متطابقون مین سی تیسری متطابقہ سی حاصل ہو (۱) مین رکہو تو

$$\frac{س س۱ س۲}{د د۱} ا = (ق۲ م۱ + \frac{س۲ ر۱}{د۱} م) ر' + ر۲ م۱ ر'۲$$

بموجب فرض کی د۲ اول رکن کو اس متطابقہ کے تقسیم کرتا ہے اور د۲ ر۲ کو بہی تقسیم کرتا ہی اسواسطی (ن۲ م۱ + $\frac{س۲ ر۱}{د۱ د۲}$ م) پورا د۲ پر تقسیم ہوگا اس خارج قسمت کو م۲ سے تعبیر کرو تو

$$\frac{س س۱ س۲}{د د۱ د۲} ا = م۲ ر' + \frac{ر۲}{د۲} م۱ ر'۲ \qquad (۶)$$

اب متطابقہ (۵) کے دونو ارکان کو س۲ مین ضرب دو اور س۲ ر' کی جگہ اوسکا

مساوی $ر_{۱}$ جو (۱) کے منطابقون مین تیسری ہی نکلے درج کرو تو

$$\frac{س س_{۱} س_{۲} ب}{د د_{۱}} = (ق_{۲} ن_{۱} + \frac{س_{۲} ر_{۱}}{د_{۱}} ن) ر_{۲} + ر_{۲} ن_{۱} ر_{۲}$$

موافق سابق کی ہم ثابت کر سکتی ہین کہ $ر_{۱}$ کے امثال پوری $د_{۲}$ پر تقسیم ہوتی ہین اور اس خارج قسمت کو $ق_{۲}$ سی تعبیر کرتے ہین تو ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{س س_{۱} س_{۲} ب}{د د_{۱} د_{۲}} = ل_{۲} ر_{۱} + \frac{ر_{۲}}{د_{۲}} ن_{۱} ر_{۲} \qquad (۷)$$

اب (۶) (۷) منطابقون سی ثابت ہوتا ہی کہ تمام قیمتین لا اور ی کی جو $\frac{ر_{۲}}{د_{۲}}$ اور $ر_{۱}$ کو معدوم کرتی ہین وہ ان منطابقون کی اول رکن کو بھی معدوم کرتی ہین لیکن $\frac{س س_{۱} س_{۲}}{د د_{۱} د_{۲}}$ اور $\frac{ر_{۲}}{د_{۲}}$ کا کوئی جزء ضربی نہین ہی اور اسیواسطے تمام حل معادلات $\frac{ر_{۲}}{د_{۲}} = ۰$ اور $ر_{۱} = ۰$ کی شرائط کو پورا کرتی ہین وہ معادلات $ا = ۰$ اور $ب = ۰$ کی شرائط کو بھی پورا کرتی ہین

اب اسیطرح موافق سابق کی (۶) اور (۷) منطابقون کو $س_{۳}$ مین ضرب دیتی ہین $س_{۳} ر_{۱}$ کی جگہ اوسکا مساوی $ر_{۳}$ جو (۱) کی منطابقون مین چوتھی سی نکلی درج کرتی ہین تو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{س س_{۱} س_{۲} س_{۳}}{د د_{۱} د_{۲} د_{۳}} ا = م_{۳} ر_{۲} + \frac{ر_{۳}}{د_{۳}} م_{۲} \qquad (۸)$$

$$\frac{س س_{۱} س_{۲} س_{۳}}{د د_{۱} د_{۲} د_{۳}} ب = ن_{۳} ر_{۲} + \frac{ر_{۳}}{د_{۳}} ن_{۲} \qquad (۹)$$

اسمین $م_{۳}$ اور $ن_{۳}$ جملی صحیحہ لا اور ی کے ہین اب منطابقی (۸) اور (۹) سی ثابت ہوتا ہے کہ تمام حل معادلات $\frac{ر_{۳}}{د_{۳}} = ۰$ اور $ر_{۲} = ۰$ معادلات $ا = ۰$ اور $ب = ۰$ کی حل ہین

اب ہم نی اپنی دعوی کا اول جزو ثابت کر دیا یعنی تمام حل جو نظم معادلات (۲) سی حاصل ہوتے ہین وہ معادلات $ا = ۰$ اور $ب = ۰$ کی شرائط کو پورا کرتے ہین

اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ تمام قیمتین جو معادلات $ا = ۰$ اور $ب = ۰$ کی شرائط کو پورا کرتی ہین وہ نظم (۲) کے جملون مین موجود ہوتی ہین منطابقہ (۳) کو اسطرح لکہ سکتی ہین کہ

$$ن ا - م ب = \frac{ر}{د} ر \qquad (۱۰)$$

(۴) کو ب مین اور (۵) کو ا مین ضرب دو اور تفریق کرو تو

$$(م_۱ ب - ن_۱ ا) ر + (م ب - ن ا) \frac{ر}{ر} ر_۱ = ۰$$

اور اسیواسطی بموجب (۱۰) کے

$$(م_۱ ب - ن_۱ ا) ر - \frac{ر ر_۱}{د د_۱} ر ر_۱ = ۰$$

اور اسیواسطے

$$م_۱ ب - ن_۱ ا = \frac{ر ر_۱}{د د_۱} ر_۱ \qquad (۱۱)$$

(۶) کو ب مین اور (۷) کو ا مین ضرب دو اور تفریق کرو تو

$$(م_۲ ب - ن_۲ ا) ر_۱ + (م_۱ ب - ن_۱ ا) \frac{ر_۲}{د_۲} ر_۲ = ۰$$

اور اسیواسطی بموجب (۱۱) کے

$$(م_۲ ب - ن_۲ ا) ر_۱ + \frac{ر ر_۱}{د د_۱} \frac{ر_۲}{د_۲} ر_۱ ر_۲ = ۰$$

اور اسیواسطی $م_۲ ب - ن_۲ ا = - \frac{ر ر_۱ ر_۲}{د د_۱ د_۲} ر_۲ \qquad (۱۲)$

اور علی ہذالقیاس (۸) اور (۹) سی ہم یہہ مستنبط کرتے ہین کہ

$$م_۳ ب - ن_۳ ا = \frac{ر ر_۱ ر_۲ ر_۳}{د د_۱ د_۲ د_۳} \qquad (۱۳)$$

مسئلہ الف (۱۴) بتلاتا ہی کہ تمام قیمتین لا اور ی کی جو ا اور ب کو معدوم کرتے ہین وہ $\frac{ر ر_۱ ر_۲ ر_۳}{د د_۱ د_۲ د_۳}$ کو بھی معدوم کرتی ہین پس اجزاء ضربی $\frac{ر}{د}$ اور $\frac{ر_۱}{د_۱}$ اور $\frac{ر_۲}{د_۲}$ اور $\frac{ر_۳}{د_۳}$ مین ضرور ایک معدوم ہوگا اسی معلوم ہوا کہ مساوات

$$\frac{ر}{د} = ۰ \text{ اور } \frac{ر_۱}{د_۱} = ۰ \text{ اور } \frac{ر_۲}{د_۲} = ۰ \text{ اور } \frac{ر_۳}{د_۳} = ۰$$

سے تمام قیمتین ی کی جو داخل ہونی کی قابل ہین انضرام پاتے ہین

پس فرض کرو کہ لا = سہ اور ی = صہ قیمتین ہین جو معادلات ا = ۰ اور ب = ۰ کی شرائط کو پورا کرتی ہین

اول فرض کرو کہ صہ ایک قیمت مساوات $\frac{ر}{د} = ۰$ کی ہی تو یہہ ظاہر ہی کہ قیمتین لا = سہ

اور ر = صہ معادلات $\frac{ب}{د}$ = ۰ اور ب = ۰ کی شرایط کو پورا کرینگی

دوم فرض کرو کہ صہ قیمت مساوات $\frac{ب}{د}$ = ۰ کی نہیں ہے لیکن وہ قیمت مساوات $\frac{ب_۱}{د_۱}$ = ۰ کی ہے

چونکہ ی = صہ سی $\frac{ب}{د}$ معدوم نہیں ہوتا تو (۱۰) سے یہہ مستنبط ہوتا ہے کہ

قیمتیں لا = سہ اور ی = صہ کی ر کو فنا کرتی ہیں تو وہ معادلات $\frac{ب_۱}{د_۱}$ = ۰ اور ر = ۰

کی شرایط کو پورا کرتی ہیں

دوم فرض کرو کہ صہ قیمت مساوات $\frac{ب}{د}$ = ۰ کی نہیں ہی اور $\frac{ب_۱}{د_۱}$ = ۰ کی بہی نہیں ہے

بلکہ وہ قیمت مساوات $\frac{ب_۲}{د_۲}$ = ۰ کی ہی چونکہ $\frac{ب}{د}$ $\frac{ب_۱}{د_۱}$ جب ی = صہ کے ہو فنا نہیں ہوتے

تو (۱۱) سی یہہ مستنبط ہوتا ہی کہ قیمتیں لا = سہ اور ی = صہ کی $ر_۱$ کو معدوم کرتی ہیں

اس سبب سی وہ معادلات $\frac{ب_۲}{د_۲}$ = ۰ اور $ر_۱$ = ۰ کی شرایط کو پورا کرتی ہیں

اب فرض کرو کہ صہ قیمت ان معادلات $\frac{ب}{د}$ = ۰ اور $\frac{ب_۱}{د_۱}$ = ۰ اور $\frac{ب_۲}{د_۲}$ = ۰ میں سی کسی ایک کی

بہی نہیں ہی بلکہ وہ مساوات $\frac{ب_۳}{د_۳}$ = ۰ کی ایک قیمت ہی چونکہ $\frac{ب}{د}$ $\frac{ب_۱}{د_۱}$ $\frac{ب_۲}{د_۲}$ معدوم نہیں ہوتے

جب کہ ی = صہ کے ہو تو (۱۲) سی یہہ مستنبط ہوتا ہی کہ

قیمتیں لا = سہ اور ی = صہ معدوم $ر_۲$ کو کرتے ہیں اور وہ معادلات $\frac{ب_۳}{د_۳}$ = ۰

اور $ر_۲$ = ۰ کی شرایط کو پورا کرتے ہیں

اسی دوسرا جزو دعوی کا ثابت ہوتا ہی مساوات $\frac{ب}{د}$ $\frac{ب_۱}{د_۱}$ $\frac{ب_۲}{د_۲}$ $\frac{ب_۳}{د_۳}$ = ۰

جسمی تمام قیمتیں ی کی جو داخل ہونیکی قابل ہیں حاصل ہوتی ہیں اسلئے اسکو آخری مساوات کہتی ہیں

(۲۷۹) مثالیں

(۱) $لا^۳ + ۳ی لا^۲ + (۳ی^۲ - ی + ۱) لا + ی^۳ - ی^۲ + ۲ی = ۰$

$لا^۲ + ۲ی لا + ی^۲ - ی = ۰$

یہاں لا + ۲ی باقی اول ہی پس ر = ۱۱ اور $ی^۲$ - ی دوسری باقی ہے

جو لا سی کچھ لگاؤ نہیں رکھتی تو صرف وہی حل ہیں جو $\frac{ب_۱}{د_۱}$ = ۰ اور $ر_۱$ = ۰

یعنی جو ی² − ی = ۰ اور لا + ۲ی = ۰ سی حاصل ہوتے ہین

(۲) لا³ + ۳ی لا² + ۲ی (ی − ۳) لا + ی² − ۴ = ۰

لا² + ی لا + ۲ی² − ۵ی + ۲ = ۰

یہان اول باقی (ی − ۲) (لا + ی + ۲) ہے پس ر = ی − ۲ اور
رَ = لا + ی + ۲ اور دوسری باقی ی² − ۵ی + ۶ ہی اور اسکو کچھہ لگاؤ لا سی نہین ہے
پس تمام حل وہ ہین جو ب/ر = ۰ اور ب = یعنی ی − ۲ = ۰ اور لا² + ۲ی لا + ۲ی² − ۵ی + ۲ = ۰
سے انصرام پاتے ہین اور جو ب١/رَ = ۰ اور رَ = ۰ یعنی ی² − ۵ی + ۶ = ۰
اور لا + ی + ۲ = ۰ سے سرانجام پاتے ہین
اور اخری مساوات ی کی (ی − ۲) (ی² − ۵ی + ۶) = ۰

(۳) لا³ + ۳ی لا² − ۳لا² + ۳ی² لا − ۶ی لا − لا + ی³ − ۳ی² − ی + ۳ = ۰

لا³ − ۳ی لا² + ۳لا² + ۳ی² لا − ۶ی لا − لا − ی³ + ۳ی² + ی − ۳ = ۰

باقی اول ۲ (ی − ۱) (۳لا² + ی² − ۲ی − ۳) ہی اور باقی دوم ۸ (ی² − ۲ی) لا ہے
اور تیسری باقی ی² − ۲ی − ۳ ہی پس تمام حل وہ ہین جو ان مساواتون سی انصرام پاتی ہین
ی − ۱ = ۰ اور لا³ − ۳ی لا² + ۳لا² + ۳ی² لا − ۶ی لا − لا − ی³ + ۳ی² + ی − ۳ = ۰ سے
اور ی² − ۲ی = ۰ سی اور ۳لا² + ی² − ۲ی − ۳ = ۰ سے
اور ی² − ۲ی − ۳ = ۰ اور لا = ۰ سے
اور ی کی اخری مساوات یہہ ہی کہ (ی − ۱) (ی² − ۲ی) (ی² − ۲ی − ۳) = ۰

(۴) (ی − ۲) لا² − ۲لا + ۵ی − ۲ = ۰

ی لا² − ۵لا + ۴ی = ۰

اب ہم دائین طرف کی رکن کو اول جملہ کے ی مین ضرب دیتی ہین تاکہ تقسیم بغیر امثال مکسور کے ممکن ہو پس س = ی اور باقی اول (۳ی − ۱۰) لا + ی² + ۶ی اب عمل تقسیم کے

جاری رہنے کے واسطے ہم د لا^2 − ۵ لا + ۴ د کو ۳ د − ۱۰ مین ضرب دیتے ہین اور اوسپر عمل ذیل کرتے ہین

(۳ د − ۱۰) لا + د^2 + ۶ د } (۳ د − ۱۰) د لا^2 − (۳ د − ۱۰) ۵ لا + (۳ د − ۱۰) ۴ د { د لا
(۳ د − ۱۰) د لا^2 + (د^2 + ۶ د) د لا
− (د^3 + ۶ د^2 + ۱۵ د − ۵) لا + ۱۲ د^2 − ۴۰ د

اب ہم کیا تو اس آخر سطر کی رقمون کو باقی شمار کرین یا آگے تقسیم جاری کرین کیونکہ اوسمین لا کا درجہ مقسوم علیہ سے کم نہین ہی اگر ہم دوسرے تجویز کو اختیار کرین تو ۳ د − ۱۰ اوسمین پھر ضرب دین تو اوسی وہی باقی حاصل ہوگی جو پہلی ہی اصل کو (۳ د − ۱۰)^2 کے ضرب دینے سے حاصل ہوتی پس عمل کو اسطرح جاری کرین

− (د^3 + ۶ د^2 + ۱۵ د − ۵۰) (۳ د − ۱۰) لا + (۱۲ د^2 − ۴۰ د) (۳ د − ۱۰) } − (د^3 + ۶ د^2 + ۱۵ د − ۵۰
− (د^3 + ۶ د^2 + ۱۵ د − ۵۰) (۳ د − ۱۰) لا − (د^3 + ۶ د^2 + ۱۵ د − ۵۰) (د^2 + ۶ د)

د^5 + ۱۲ د^4 + ۸۷ د^3 − ۲۰۰ د^2 + ۱۰۰ د

یہان ایک باقی لا سی بالکل بے تعلق ہی اور یہہ قیمت ر۱ کی ہی اور یہان د۱ = د پس حل وہ ہین جو ان مساواتون سی انصرام پاتے ہین کہ

د^4 + ۱۲ د^3 + ۸۷ د^2 − ۲۰۰ د + ۱۰۰ = ۰ اور (۳ د − ۱۰) لا + د^2 + ۶ د = ۰ (و)

(۲۷۸) دفعہ ۲۷۶ کی عمل کی نسبت ہم ان ان باتون کو کہہ سکتے ہین کہ

(۱) ہم ہمیشہ س اور ر کو ایسا فرض کرتے ہین کہ اونمین کوئی جزضربی مشترک نہو سکے اگر اگر ذو فق اعظم س اور ر کا ہو تو تقسیم د۱ کی ب پر تعبیر امثال مکسور کے داخل ہونی کی ہو جائیگی جیسا کہ متطابقہ (۳) سی ظاہر ہے پس س نہایت سادہ جزضربی نہین جو مضروب فیہ ا کا پہلی ب پر تقسیم کرنی سی بنا ہی اسی معلوم ہو کہ نہایت سادہ جزضربی فرض کرنی سی ہم د = ۱ کے بناتے ہین

اور علی ہذا القیاس س۱ اور س۲ ۰۰۰ ایسی ہین کہ س۱ اور ر۱ کا کوئی جزضربی مشترک نہین ہے

اور س۲ اور ر۲ کا کوئی جز ضربی مشترک نہیں ہے
اسی معلوم ہوا کہ ہم تمام س و س۱ و س۲ و س۳ ... ایسا مقرر کر سکتی ہیں کہ د = ۱ اور د۱ وفق اعظم س۱ اور ر۱ کا ہو اور د۲ وفق اعظم $\frac{س س۱}{د۱}$ اور ر۲ کا اور د۳ وفق اعظم $\frac{س س۱ س۲}{د۱ د۲}$ اور ر۳ کا اور علی ہذا القیاس

دوم فرض کرو کہ جو لاسی بی لگاؤ باقی فرض کی گئی تھی وہ برابر صفر کی ہی تو ر۲ وفق مشترک ا اور ب کا ہوا اسی معلوم ہوا کہ حل معادلات ا = ۰ اور ب = ۰ کے

(۱) لا اور ی کے بی شمار قیمتوں پر جو مساوات واحد ر۲ = ۰ سی مستنبط ہوتی ہیں شامل ہیں (۲) معادلات $\frac{ا}{ر۲}$ = ۰ اور $\frac{ب}{ر۲}$ کے حل کرنی سی جو لا اور ی کے قیمتیں محدود حاصل ہوتی ہیں اون پر شامل ہیں لیکن اس سبب سی کہ ر۳ = ۰ تو (۱) کی متطابقوں سی بموجب دفعہ ۲۷۶ کے یہ مستنبط ہوتا ہی کہ ر۲ تقسیم ر۱ اور ر پر ہوتی ہیں اب متطابقوں (۳) (۴) (۵) (۶) (۷) (۱۰) (۱۱) (۱۲) کو بموجب دفعہ ۲۷۶ کے ر۲ پر تقسیم کرو تو جدید متطابقی حاصل ہونگی جنمیں ا و ب و ر و ر۱ اور ر۲ بجای $\frac{ا}{ر۲}$ و $\frac{ب}{ر۲}$ و $\frac{ر}{ر۲}$ و $\frac{ر۱}{ر۲}$ و $\frac{ر۲}{ر۲}$ کی رکھی گئی ہیں بوساطت ان متطابقوں کے ہم ثابت کر سکتی ہیں کہ تمام حل معادلات $\frac{ا}{ر۲}$ = ۰ اور $\frac{ب}{ر۲}$ = ۰ ان نظموں کے حل کرنی سی حاصل ہوتی ہیں کہ

$\frac{ر۲}{د}$ = ۰ اور $\frac{ب}{ر ر۲}$ = ۰
$\frac{ر۱}{د۱}$ = ۰ اور $\frac{ر}{ر۲}$ = ۰
$\frac{ر۲}{د۲}$ = ۰ اور $\frac{ر۱}{ر۲}$ = ۰

مثلاً فرض کرو کہ

لا۳ + ی لا۲ − (ی۲ + ۱) لا + ی − ی۳ = ۰

اور لا۳ − ی لا۲ − (ی۲ + ۶ی + ۹) لا + ی۳ + ۶ی۲ + ۹ی = ۰

تقسیم اولین سی باقی کی واسطی ۲ {ی لا۲ + (۳ی + ۴) لا − (ی۳ + ۳ی۲ + ۴ی)}

حاصل ہوتا ہے پس

$$ر = ی لا^2 + (۳ی + ۴) لا - (ی^3 + ۳ی^2 + ۴ی)$$

اب تقسیم دوم کرنے کے واسطے مقسوم کو دو مین اور تقسیم کے اول مرحلہ کے بعد پھر دو مین ضرب دو تاکہ تقسیم جاری رہی باقی ر، ر کے واسطے ۸ (ی^2 + ۳ی + ۲) (لا - ی) حاصل ہوگا اب ر کو لا - ی پر تقسیم کرو تو خارج قسمت ی لا + ی^2 + ۳ی + ۴ ہوگا اور اب کوئی باقی نہیں ہے پس معادلات مفروضہ کی حل (۱) مساوات واحد لا - ی = ۰ سی جو بی شمار قیمتین لا اور ی کی حاصل ہوتی ہین اون پر شامل ہین (۲) اور ان محدود حلون پر شامل ہین جو ان معادلات کی حل کرنے سے حاصل ہوتی ہین کہ

$$ی^2 + ۳ی + ۲ = ۰ \text{ اور } ی لا + ی^2 + ۳ی + ۴ = ۰$$

سوم دفعہ ۲۷۶ کا ثبوت فرض کرتاہی کہ لا اور ی محدود ہین مگر یہہ ممکن ہے کہ ایک مساوات کی حل بی شمار ہون مثلاً فرض کرو کہ (ی - ۱) لا^2 - ۲ لا + ی^2 = ۰ پس جب تک کہ ی برابر واحد کے نہو تو اس مساوات درجہ دوم ہی دو محدود قیمتین انصرام باقی ہین اگر ی نہایت قریب اکی ہوتا ہے تو ایک قیمت لا کی بی نہایت زیادہ ہوتی ہی بائیسوان باب جبر مقابلہ کا دیکھو

پس جب ی = ۱ تو ہم کہتے ہین کہ لا کی لا انتہا قیمتین ہین

ہم نی دفعہ ۲۷۶ کی تحقیقات مین ایسی لا اور ی کی غیر محدود قیمتین نہین فرض کی ہین اون پر علیحدہ بحث ہوسکتی ہی مثلاً اگر ہم یہہ تحقیق کرنا چاہین کہ لا کی ایک قیمت غیر محدود داخل ہونی کی قابل ہی تو ہم $\frac{1}{لا'}$ بجای لا کی رکھین اور مساوات کو کسری خالص کرین اور فرض کرین کہ لا' = ۰ تو اب ہم کو دو مساواتین ی کی حاصل ہونگیں اور اگر اونکی ایک قیمت یا کئی قیمتین مشترک ہونگین تو اس قیمت یا ان قیمتون کو مع غیر محدود قیمت لا کے معادلات مفروضہ کی شرائط کا پورا کرنی ہی

تیئیسواں باب ایک جملہ کا سلسلہ میں پھیلانا

(۲۷۹) فرض کرو کہ ایک مساوات ایسی ہی کہ اوسمین دو مقادیر مجہول لا اور ء مخلوط ہین پس اگر ہم مساوات کو حل کر کی قیمتین ء کی لا کی رقمون مین دریافت کر سکین تو ء کی ایک قیمت کو سلسلہ قواء لا مین معلوم کر سکینگی اور اب ہم ء کی قیمتون کی پہلانی کی ایک ترکیب لکھتی ہین اور اسی پہلی ء کی قیمتین محدود رقمون مین نہین دریافت کرینگی

اس ترکیب کو لاگرانتر نی ایجاد کیا تھا نیوٹن صاحب کا جو متوازی الاضلاع مشہور ہے اوسمین بہی اس عمل کا بیان ہوا ہی جس کسی کو اس مسئلہ کا مفصل حال دریافت کرنا ہو کہ وہ کس طرح ایجاد ہوا اور کسنے ایجاد کیا تو وہ پروفیسر ڈی مورگن صاحب کی تحریر کو اس باب مین دیکھین

(۲۸۰) فرض کرو کہ مساوات

ا ءَ + ب ءً + . . . + ک ءکد + . . . + ص ءقد = ۰

سے تعبیر ہوتی ہی اسمین ا ب . . . ک . . . ص تمام جملی لا کے ہین اور ہم فرض کرتی ہین کہ سہ و صہ . . کد . . . بہ ترتیب تنازلی مقادیر جبریہ کی لکھی ہوئی ہین اور تمام تحقیقات جہان ہم نے بڑا یا بہت بڑا یا چہوٹا یا بہت چہوٹا مقادیر کو لکھا ہے وہان اونکی معنی جبریہ لئے ہین

فرض کرو کہ ا ا درجہ کا یعنی لا سی کوئی بڑی قوت لا کی ا مین نہین واقع ہوتی اور ب ب درجہ کا ہی . . ک ک درجہ کا اور . . . ص ص درجہ کا بالفعل ہمارا بڑا مطلب یہہ ہے کہ دفعہ ذیل کے مسئلہ کو حل کرین

(۲۸۱) مطلب ہمارا ہی کہ وہ سب طریقی دریافت کرین جسکی موافق قیمت ط کی ایسی دریافت کرنا کہ سلسلہ ارقام ذیل مین دو یا زیادہ رقمین برابر یا بڑی باقی رقمون مین سی کسی ایک رقم سی ہو

ا + سہ ط ب + صہ ط . . . ک + کد ط . . . ص + قد ط

اول ط کو فرض کرو کہ + ∞ ہی تو اول رقم باقی ارقام مین سی ہر یک سی بڑی ہوگی اور جب ط گہٹتی ہے تو ہر یک رقم گہٹتی ہی لیکن ہر یک بہ نسبت اپنی ما قبل کے رقم زیادہ

آہستہ کم ہوتی ہی فرض کرو کہ ط کی وہ قیمت ہی کہ ا + سہ ط اول برابر ارقام مابعد مین سی ایک یا کی ایک کے برابر ہوا اور یہ قیمت اسطرح حاصل ہوگی معادلات ذیل مین سی ط کی سب سے بڑی قیمت دریافت کرین

ا + سہ ط = ب + صہ ط اور ا + سہ ط = س + لر ط . . . ا + سہ ط = ک + کد ط . . . ا + سہ ط = ص + قد ط

یعنی بڑی قیمت ط کی اس سلک ذیل سے دریافت ہوگی کہ

ب - ا / سہ - صہ ، س - ا / سہ - لر . . . ک - ا / سہ - کد . . . ص - ا / سہ - قد

فرض کرو کہ ک - ا / سہ - کد ان قیمتون مین سب سی بڑی قیمت ہی اگر ایک قیمت بڑی دوسری سی ہے یا اگر کئی ایک برابر اور بڑی باقی مین سی بہ نسبت کسی کے ہو تو ک - ا / سہ - کد کو اونمین اخر فرض کرو اور ک - ا / سہ - کد کو مر سے تعبیر کرو

فرض کرو کہ ط کم مر سی ہوتا جاتا ہی یہانتک کہ ک + کد ط اول برابر ایک یا کئی ایک کے ارقام مابعد مین سی ہوا ہی قیمت ط کی موافق سابق کی معادلات ذیل مین ط کی سب سے بڑی قیمت لینی سے دریافت ہو سکتی ہے

ک + کد ط = ل + لر ط و ک + کد ط = م + لب ط . . . ک + کد ط = ص + قد ط

یعنی سب سی بڑی قیمت اس سلک مین سی لینی چاہیئی کہ

ل - ک / کد - کر ، م - ک / کد - لب . . . ص - ک / کد - قد

فرض کرو لا انمین سی سب سی بڑی قیمت منتخب کی جاے اگر ایک قیمت بڑی بہ نسبت کسی اور کی ہو یا کئی ایک بڑی بہ نسبت اوروں کی ہون تو انمین سی سب سے اخر رقم منتخب کیجائی فرض کرو کہ مر قیمت اس منتخب رقم کی ہی جو ن - ک / کد - قد فرض کیجائی

فرض کرو کہ ط پھر کم لر سی ہوتی جاے اور موافق سابق کی عمل کر کی مر کو معادلات ذیل سی دریافت کرو

ن + سد ط = ع + بد ط . . . ن + سد ط = ص + قد ط

یہی عمل جاری رہی جب تک کہ رقم ص + قد ط قیمت ط کی دریافت کرنے کیلئے کام آئی

پس اسی ہم دیکھتے ہین کہ ط کی تمام مناسب قیمتین دریافت ہوگئین
(۲۸۲) اب فرض کرو کہ ا = لا (ا + ا) اسمین ا بے لگاؤ لا سی ہی اور ا جب لا لانہایت ہو معدوم ہوجایگا اور اسیطرح فرض کرو کہ ب = لا (ب + ب ا) اور علی ہذا القیاس فرض کرو ی = لا (لو + لو) اسمین لو بے لگاؤ لا سی ہی اور جب لا لانہایت ہوتا ہی تو لو معدوم ہوتا ہی پس مساوات مفروضہ کو جسمین لا اور ی ملتف ہین یہہ قیمتین مندرج کرو تو

لا + سط (ا + ا) (لو + لو) س + لا ب + صط (ب + ب ا) (لو + لو) ص + ...

... + لا ک + کط (ک + ک ا) + (لو + لو) کد + لا ص + قط (ص + ص ا) (لو + لو) قد = ۰

چونکہ یہہ مساوات لا کی سب قیمتون پر حاوی ہی اسلئی وہ لا کی لانہایت قیمت پر بھی حاوی ہوگا اور یہہ صورت نہین واقع ہونی کی اگر لا کی سب سی اعلی قوت صرف ایک رقم مین ہی واقع ہو اس مطلب کو یون بھی بیان کر سکتی ہین کہ مجموعہ امثال لا کی اعلی قوت کا معدوم ہو پس یہی بات ہی جسکی سبب سے تحقیقات دفعہ گذشتہ کا استعمال ہو سکتا ہے

بموجب فرض کی مر سب سی بڑی قیمت ط کی ہے جو داخل ہو سکتی ہی اور مساوات بالا کی دائین طرف جو جملہ کا حصہ ایسا لکھا ہی کہ جسمین لا کی اعلی قوت ملتف ہی یہہ ہے کہ

لا + سمر { (ا + ا) (لو + لو) س + ... + (ک + ک ا) (لو + لو) ک }

جب لا لانہایت ہو تو امثال لا + سمر معدوم ہونی چاہیے اس بات سی یہہ مساوات ی کی قیمت دریافت کرنے کے واسطی حاصل ہوتی ہے کہ

ا لو س + ... + ک لو کد = ۰

اس مساوات سی لو کی قیمتین دریافت ہونگین اور پھر لو کی قیمت کی موافق ی کی قیمت حاصل ہوگی جسمین رقم لا کی اعلی قوت رکھتی والی لو لا م ہوگی

اور اسی طرح سی مر سر قیاس کرکے مساوات ذیل لو کے تحقیق کرنی کے واسطی حاصل ہوگی کہ

ک لو کد + ... + ن لو سد = ۰

اس مساوات سی قیمتین لو کی دریافت ہوسکتی ہین اور لو کی ہر قیمت کی موافق ی کی ہر ایک قیمت دریافت ہوگی

جسمین رقم اعلی قوت لا کی رکہنی والی لو لاٗ ہوگی

پس اسطرح عمل کرنے سی ہم ی کی ہر قیمت مین اعلی قوت لا کی دریافت کرتے ہین

اب پہر ط اور لو کی متناظر قیمتون کا ایک زوج مستحصلہ کام مین لاؤ اور

ی = لاط (لو + لی) اور ی کی اس قیمت کو اصل مساوات مین جسمین لا اور ی ملتف ہین

مندرج کرو تو اسطرح ایک مساوات حاصل ہوگی کہ جسمین لا اور لی اور مقادیر معلومہ متعلق ہونگین

اب وہ ترکیب کام مین لائین جسکی کہ لو کی قیمتون مین لا کی اعلی قوتین دریافت ہوئین

پس اسطرح سی دوسری رقمین ی کی قیمتون کی صورت مفصلہ کی سلسلہ کی دریافت ہونگین

جسمین لا کی قوتون مین ترتیب تنازلی ہوگی اور اس عمل کو جہانتک چاہین جاری رکہین

(۲۸۳) ترکیب مذکورہ کا اقتضا یہہ نہین ہی کہ قوت سہ و صہ... قد و ا و ب... ص

اعداد صحاح ہون مگر اس کتاب مین جس قسم کی مساواتون کا ذکر ہی اونکی اول رقمون کی دریافت کرنی مین

جب اس ترکیب کا استعمال کرینگے تو وہ اعداد صحاح ہونگی

اب ہم اس ترکیب کا استعمال ایک مثال مین کرتے ہین

فرض کرو کہ یہہ مساوات ہو کہ

$$ی^۴ (لا^۳ - ۳ لا) + ی^۲ (لا^۳ + ۲ لا^۲) - ی (۴ لا^۵ + ۳) + ۳ لا^۶ = ۰$$

اب سلک ارقام $\frac{ب - ا}{سہ - صہ}$ و $\frac{س - ا}{سہ - لر}$ ... کی اس صورت مین یہہ ہے کہ

$\frac{۲ - ۳}{۲ - ۴}$ و $\frac{۳ - ۵}{۱ - ۴}$ و $\frac{۳ - ۶}{۴ - ۰}$ اب انمین سی دوسری اور تیسری رقم برابر ایک

کے ہی جو بہ نسبت $\frac{۱}{۲}$ کی بڑہی ہی اور یہہ قیمت اول رقم کی ہی پس م = ۱ ای معلوم ہوا کہ

ی = لا (لو + لی) رکہو اور اسکو مساوات مفروضہ مین رکہو تو سب سے اعلی قوت لا کی لاٗ ہے

اور رقم جسمین وہ ملتف ہے یہہ ہے کہ

$$لا^۶ [(لو + لی)^۴ - ۴ (لو + لی) + ۳]$$

پس جب لا لانہایت ہوتو یہہ امثال معدوم ہونی چاہئی اور اسی یہہ حاصل ہوتا ہے
لو^۴ - ۴لو + ۳ = ۰

اب یہہ ظاہر ہی کہ لو = ا ایک حل ہی اور جملہ مشتقہ ۴ لو^۳ - ۴ بہی معدوم ہوتا ہے جب لو = ا تو قیمت ایک اتی ہے

لو^۴ - ۴لو + ۳ کو (لو - ۱)^۲ پر تقسیم کرو تو خارج قسمت لو^۲ + ۲ لو + ۳ حاصل ہوگا پس اور قیمتین لو کی مساوات لو^۲ + ۲لو + ۳ = ۰ سے حاصل ہونگین اور وہ ‎-۱ ± ‎√-۲ ہین پس اب یہہ نتیجہ نکالتی ہین کہ مساوات مفروضہ سی دو حقیقی قیمتین ء کی ارقام ہین حاصل ہونگین اور لا اول رقم ان قیمتون مین سی ہر یک قیمت مین اوسوقت ہوگی کہ وہ لا کی قواء متنازلہ کے سلسلہ مین بیان کیجاے

اب ہم لا (۱ + لو) کو ء کی جگہ مساوات مفروضہ مین رکہو اور لو کی قیمتون کو دریافت کرو بالفعل اسی مثال کو دوبارہ فرض کرینگے

(۲۸۴) دفعات ۲۸۱ اور ۲۸۲ مین نتایج ذیل حاصل ہوتے ہین

(۱) اگر ا + سہ د ب + صہ . . . ک + کد ص + قد سب برابر ہون تو مقادیر مر و مر د مرٔ . . . سب برابر واحد کے ہونگے

(۲) اگر مقادیر ا + سہ و ب + صہ . . . ک + کد . . . ص + قد مین سی دو یا زیادہ برابر ہون اور بڑی بہ نسبت کل باقی ارقام کی ہون تو واحد سلک مر د مر و مرٔ . . مین واقع ہوگا اسواسطی ظاہر ہی کہ ط = ا ایک مناسب قیمت تحقیقات ۲۸۱ مین ہی کیونکہ یہہ قیمت دو یا زیادہ ارقام کو برابر اور بڑی بہ نسبت باقی ارقام کے بناتی ہے

جبریہ خطوط منحنی کی خطوط مستقیمہ ممتنع الملاقات کا ضابطہ ان دو نتایج مین ملتف ہے باقی اس دفعہ مین ہم سہ و صہ و لہ . . سب کو صحاح فرض کرتی ہین اور قد کو صفر

(۳) دفعہ ۲۸۲ مین اول مساوات لو کی سہ - کد قیمتین رکھتی ہی اور دوسری مساوات کی کد - سد قیمتین اور علی ہذا القیاس مین الحاصل ہم کو یہہ قیمتین ی کی اول رقم کی دریافت ہوتی ہین اور یہی ہونا چاہیی تہا اسلئی کہ مساوات ی کی سہ درجہ کی ہے

(۴) فرض کرو کہ تمام جملی لا کی ک سی ل تک برابر ہین اور اعلی درجہ کی بہ نسبت اورون کی ہین تو ی کی قیمتون مین سے سہ - کد قیمتین ہونگین جو لا کی مثبت قوت سی شروع ہوتی ہین اور کد - سد قیمتین ہونگین جو صفر قوت سی لا کی شروع ہوتی ہین اور سد قیمتین جو لا منفی قیمتون سی شروع ہوتی ہین اسواسطی کہ کد - سد قیمتین ی کی ہین جو لا کی صفر قوت سی شروع ہوکر صعود کرتی ہین اس سبب سے کہ بموجب فرض کی قیمت ط = ۰ تمام ارقام ذیل

کد + کد ط دل + لط ۰۰۰ ن + سد ط کو برابر اور بڑا کسی قسم سی جو انکی اگی ائی بناتی ہی سہ - کد قیمتین ی کی جو لا کی مثبت قیمتون سی شروع ہوکر صعود کرتی ہین اور اس صعود کا سبب مثبت قیمتین ط کی اور اونکی موافق قیمتین آو کی ہین جو قوت نمالون سہ و صہ ۰۰۰ کد کے تعلق سی حاصل ہوتی ہین اور سد قیمتین ی کی لا کی منفی قوتون سے شروع ہوتی ہی اور صعود کرتی ہین اور یہہ صعود ط کی منفی قیمتون سی اور انکی موافق آو کی قیمتون سی جو قوت نمالون سد ۰ ۰ قد سی حاصل ہوتی ہین ہوتا ہے اور اسمین قد =

(۵) ا و ب ۰۰۰ ص تمام متحد الدرجہ ہین اور م اعلی درجہ بہ نسبت مابقی کے رکہتا ہی سہ - لب قیمتین ی کی ہین جن مین اعلی قوت لا کی مثبت قوت نما $\frac{م - ا}{سہ - لب}$ ہی اور ی کی لب قیمتین ہین جن مین اعلی قوت لا کا منفی قوت نما - $\frac{م - ا}{لب}$ ہے

(۲۸۵) دفعہ ۲۸۲ مین جب مساوات لو کی حاصل ہوتی ہی اور اوسی ی کی قیمتون کے دوسرے رقم کی دریافت کرتی ہین اوسپر ایک بات ہم کہتی ہین فرض کرو کہ ی = لاَ (لو + لو) اسمین لو اور ط معلوم ہین اس ی کی قیمت کو مساوات مفروضہ مین مندرج کرو اسطرح مساوات مفروضہ کے درجہ کی مساوات حاصل ہوگی اگر لو کی قیمتون مین بعض داخل ہونی کی قابل ہونگین اسواسطے کہ موجب فرض کے لو معدوم ہوتا ہی جب لا لا نہایت ہو

پس وہ قیمتین ی کی جولا کی مثبت قوت سی شروع ہوتی ہین یالا کی صفر قوت سے اونکو مسترد کرنا چاہیی یہہ لو کی مسترد قیمتین ی کی اور قیمتون سی متعلق ہونگین جنسے کہ بالفعل ہم کو کچہہ تعلق نہین ہی کیونکہ اسوقت صرف ہم یا تو وہ خاص قیمت ی کی تلاش کر رہی ہین جو لو لا سی شروع ہوتی ہیں یا خاص اون قیمتون ی کی تلاش کر رہی ہین جو اسطرح شروع ہوتی ہین

اور ایک سی زیادہ ہین اور جنمین یوا ور ط کی معلوم قیمتین ہین

(۲۸۶) دفعہ ۲۸۲ کی مثال کو دوبارہ لو ی کی جگہ لا (لو + لو) اور لو = ۱ کے فرض کرو تو لا پر تقسیم کرنے کے بعد یہہ نتیجہ حاصل ہوگا

لو^۴ (لا^۵ ...) + لو^۳ (۴ لا^۵ ...) + لو^۲ (۶ لا^۵ ...) − لو (۱۰ لا^۴ ...) − ۲ لا^۴ = ۰

یہان لو کی مثال مین اعلی قوتین لا کی بیان کر دین اب دفعہ ۲۸۲ کی کسور سے یہہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۵ - ۵}{۳ - ۴} \text{ د } \frac{۵ - ۵}{۲ - ۴} \text{ د } \frac{۵ - ۴}{۱ - ۴} \text{ د } \frac{۵ - ۴}{۰ - ۴}$$

یہان اول دو قیمتین صفر ہین اور جبر مقابلہ کی اعتبار سی بڑی بہ نسبت اورون کے ہین لیکن صفر قیمت مسترد ہونی چاہیی جسکا بیان دفعہ بالا مین کیا گیا اسیواسطی دفعہ ۲۸۱ کی طرح پہر ہم عمل کرین اور فرض کرین کہ مر = ۰ اب ہم کو مر دریافت کرنا ہی اسواسطی یہہ کسرین بنائی جائینگی

$$\frac{۴ - ۵}{۱ - ۲} \text{ د } \frac{۵ - ۴}{۰ - ۲}$$

انمین سی دوسری − ½ ہی اور جبر مقابلہ کے لحاظ سی بڑی ہے پس اسکے موافق ہم لو = لولا^{−½} اور مساوات ۶ لو^۲ − ۲ = ۰ سی قیمت لو کی دریافت کرتی ہین پس لو = $\frac{۱}{\pm \sqrt{۳}}$

پس اول رقم لو کی $\frac{۱}{\sqrt{۳ لا}}$ یا $-\frac{۱}{\sqrt{۳ لا}}$ ہے اسیواسطی جہانتک ہم نی عمل کیا ہے

ی = لا (۱ + $\frac{۱}{\sqrt{۳ لا}}$ + ۰۰) یا ی = لا (۱ − $\frac{۱}{\sqrt{۳ لا}}$ + ۰۰)

(۲۸۷) لو کی قیمتون کی صفت مساوات عامہ لو کی بناوٹ کی امتحان سی معلوم ہوسکتی ہے اول فرض کرو کہ بجای ی کی لا^ط لو رکہین اور پہر لو کو لو + لو سی تبدیل کرین جب ہم ی کی جگہ لا^ط لو

پس اگر ہم اپنی نتایج کو علم ہندسہ کی موافق بیان کرین اور خطوط منحنی جو کی اون قیمتون کی
موافق کہ قواء لا مین بیان ہوئی ہین مرتسم کرین تو اول رقم اوس سلسلہ کی جو قیمت د کی واسطی
ہم نی دریافت کی ہی اوسی صفت ذاتی خط منحنی کی مبدء سی بہت فاصلہ پر معلوم ہوگی
لیکن یہہ ترکیب اسطرح بہی استعمال مین آسکتی ہی کہ قیمتین د کی موافق قواء متصاعدہ کے
دریافت کرین تو قیمت د کی اول رقم صفت ذاتی خط منحنی کی جو مبدء سی بہت قریب ہی بتلاینگی
تاکہ د کی قیمتین قواء متصاعدہ لا مین دریافت کرنی کی ترکیب کو استعمال مین لاسکین
یہہ تبدلات ہم کو کرنی چاہیئی کہ اول سہ وصہ . . . قد کو بہ ترتیب تصاعیدی بلحاظ مقادیر
جبریہ کی لکھو اور د معدوم ہوگا جب لا معدوم ہوگا وہ لا کی لاانہایت ہونی سی معدوم
نہین ہوگا پس لا سب سی ادنی درجہ قوت کی ا مین ہو تو موافق سابق کی وہ سب سے
اعلی قوت نہین ہوگی اور اسی کی متماثل تبدل ب اور ب مین اور باقی او متشابہ مقادیر مین کرو
پس ط جب + صہ ہی تو مقادیر ذیل

ا + سہ ط د ب + صہ ط . . ک + کہ ط . . . ص + قد ط

مین ترتیب تصاعیدی بلحاظ مقدار کے ہوگی
موافق سابق کی سب سے بڑی قیمت ط کی ان مساواتون سی دریافت کرو کہ

ا + سہ ط = ب + صہ ط و ا + سہ ط = س + لہ ط . . . ا + سہ ط = ک + کہ ط . . . ا + سہ ط = ص + قد ط

چوبیسوان باب مسائل متفرقہ

(۲۸۹) اس باب مین معادلات کی مسائل متفرقہ نہایت دلچسپ اور بہت بکار آمد لکہینگے اوسی
اوپر کے صفحون مین جو اصول لکہی ہین اونکی توضیح اور تشریح خوب ہوگی گویا یہہ مسائل
اون اصول کی مثالین ہین
ثابت کرو کہ مساوات

$$\frac{ا^2}{لا - ا} + \frac{ب^2}{لا - ب} + \frac{س^2}{لا - س} + \cdots + \frac{ک^2}{لا - ک} - لہ = ۰$$

کی کوئی خیالی قیمت نہیں ہوتی اگر یہہ ممکن ہو تو فرض کرو کہ ع + ق $\sqrt{-1}$ ایک قیمت ہی تو ع - ق $\sqrt{-1}$ بھی دوسری قیمت ہوگی اب ان قیمتوں کو متواتر مساوات بجای لا کے لکھو اور ماحصل انہیں تفریق کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ق \left[\frac{ا^2}{(ع - ا)^2 + ق^2} + \frac{ب^2}{(ع - ب)^2 + ق^2} + \frac{س^2}{(ع - س)^2 + ق^2} + \cdots + \frac{ک^2}{(ع - ک)^2 + ق^2} \right] = 0$$

اور یہہ ناممکن ہی اگر ق = ۰ کے نہ ہو

یا اس مسئلہ کو اسطرح ثابت کرو کہ مساوات مفروضہ کی دائیں طرف کی رکن کو مح (لا) سی تعبیر کرو اور فرض کرو کہ ا و ب و س ۰۰ ک مقادیر حریہ بہ ترتیب تصاعدی ہیں جب لا کچھہ ہی بڑا بہ نسبت ا کے ہو تو مح (لا) کی اول رقم بہت بڑی ہوگی اور مثبت ہوگی اور لا کی ا کی ساتھہ قربت کافیہ فرض کرکی ہم مح (لا) کی مثبت قیمت قطعی حاصل کر سکتی ہیں اور جب لا کچھہ ہی کم ب سی ہو تو دوسری رقم مح (لا) کی بہت بڑی ہوگی اور منفی ہوگی اور لا کی ب کے ساتھہ قربت کافیہ فرض کرکی ہم مح (لا) کی منفی قیمت حاصل کر سکتی ہیں پس لا کی ا اور ب کے درمیان بعض قیمت کے مقرر کرنی سی مح (لا) کے علامت بدلتا ہی اور اسیطرح ب اور س کے درمیان لا کی بعض قیمت سے مح (لا) کی علامت بدلتی ہے اور علی ہذا القیاس اسطرح ہم ثابت کر سکتی ہیں کہ مساوات مح (لا) = ۰ کی سب قیمتیں حقیقی اور غیر متساوی ہیں مساوات مح (لا) = ۰ کی جو صورت ہی اوسی بہت آسان مساوات کی خاصیت جسکا اوپر بیان ہوا آسانی سی ثابت ہو سکتی ہی ظاہر ہی کہ اگر مساوات کو کسور سی خالص کر کے اصلی گینڈی کی صورت میں مساوات کو بدل لیں تو کچھہ ہماری نتیجہ نکالنی پر اثر نہیں ہوگا یعنی اگر بجای مساوات مح (لا) = ۰ کی یہہ مساوات بنا لیں کہ

$$مح (لا) (لا - ا) (لا - ب) (لا - س) \cdots (لا - ک) = 0$$

تو کچھہ نتیجہ میں فرق نہیں آیگا اور ثبوت ظاہر ہو جائیگا

(۲۹۰) ن مقادیر لا۱ و لا۲ و لا۳ ۰۰ لان کی قیمتیں ان ن مساواتوں سی دریافت کرو

لا۱ + لا۲ + لا۳ + ۰۰ + لان = ۰

ا۱ لا۱ + ا۲ لا۲ + ا۳ لا۳ + ۰۰ + ان لان = ۰

ا۱^۲ لا۱ + ا۲^۲ لا۲ + ا۳^۲ لا۳ + ۰۰ ان^۲ لان = ۰

ا۱^(ن-۲) لا۱ + ا۲^(ن-۲) لا۲ + ا۳^(ن-۲) لا۳ + ان^(ن-۲) لان = ۰

ا۱^(ن-۱) لا۱ + ا۲^(ن-۱) لا۲ + ا۳^(ن-۱) لا۳ + ۰۰ + ان^(ن-۱) لان = ب

ان مساواتون جداگانہ س ن-۱ وس ن-۲ ۰۰ وس۲ وس۱ وا مین ضرب دو اور
اور بالفعل س ن-۱ وس ن-۲ ۰۰ س۲ وس۱ غیر معین ہین اور جو حاصل ہون اونکو
جمع کرو اور یہہ فرض کرو کہ س ن-۱ وس ن-۲ ۰۰ س۲ وس۱ ایسی ہین کہ
لا۲ ولا۳ ۰۰ لان کے امثال کو معدوم کرتے ہین تو

لا۱ (ا۱^(ن-۱) + س۱ ا۱^(ن-۲) + س۲ ا۱^(ن-۳) + ۰۰ + س ن-۲ ا۱ + س ن-۱) = ب

س ن-۱ وس ن-۲ ۰۰ س۲ وس۱ کے باب مین جو فرض کیا ہی اوسی یہہ استخراج ہوتا ہے
کہ ا۲ وا۳ ۰۰ ان قیمتین مساوات

ی^(ن-۱) + س۱ ی^(ن-۲) + س۲ ی^(ن-۳) + ۰۰ + س ن-۲ ی + س ن-۱ = ۰

کی ہین اسیواسطے دائین طرف مساوات کی ازروی تطابق برابر

(ی - ا۲) (ی - ا۳) ۰۰ (ی - ان)

اسی معلوم ہوا کہ ا۱ کو بجای ی کی مساوات مین رکہین جسی لا۱ معین ہو تو
لا۱ اس صورت مین نمایان ہوگا کہ

لا۱ (ا۱ - ا۲) (ا۱ - ا۳) ۰۰ (ا۱ - ان) = ب

پس لا۱ معلوم ہوگیا اور لا۲ ولا۳ ۰۰ لان کو قرینہ سی دریافت کر سکتے ہین

(۲۹۱) ن مقادیر لا و ک و ی ۰۰ ان ن مساواتون سے دریافت کرو

لا / (ک۱ - ا۱) + ک / (ک۱ - ب۱) + ی / (ک۱ - س۱) + ۰۰ = ۱

پس بموجب دفعہ ۲۵ کے قیمت ع م کی ہم کو دریافت کرنی ہے (۱) مین لا کو لا/س سے بدل دو اور س^ن مین ضرب دو تو

(لا + س^ن) (لا + س^۲) ... (لا + س^{ن+۱}) = لا^ن + ع۱ س لا^{ن-۱} + ... + ع ن-۱ س^{ن-۱} لا + ...

(۱) اور (۲) سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

(لا + س^{ن+۱}) (لا^ن + ع۱ لا^{ن-۱} + ... + ع ن-۱ لا + ع ن) =

(لا + س) (لا^ن + ع۱ س لا^{ن-۱} + ... + ع ن-۱ س^{ن-۱} لا + ع ن س^ن)

اس مطابقہ کی دونو رکنوں مین امثال لا^{ن-م+۱} کو اسمین برابر لکھو تو

ع م + س^{ن+۱} ع م-۱ = ع م س^م + ع م-۱ س^م

اسیواسطے ع م = ع م-۱ · س^م (س^{ن-م+۱} - ۱) / (س^م - ۱) ... (۳)

اور ع۱ = س + س^۲ + ... + س^ن = س (س^ن - ۱) / (س - ۱) تو بوساطت (۳) کے ہم ع۲ اور ع۳ و ع۴ ... کو متواتر معین کرسکتے ہین اور اسی ہم کو قیمت مطلوب ع م کے حاصل ہو جائیگی

(۲۹۳) فرض کرو کہ ا و ب و س ... ن مقادیر ہین اور ص ن اونکا مجموعہ ہے ص ن-۱ مجموعہ اونمین ن-۱ مقادیر کا ہی اور علیٰ ہذاالقیاس اور فرض کرو کہ ح

(ص ن)^ر - ح (ص ن-۱)^ر + ح (ص ن-۲)^ر - ... + (-۱)^{ن-۱} ح (ص۱)^ر

تعبیر کرتا ہی یہان ح (ص م)^ر مجموعہ ایسی ارقام کو تعبیر کرتا ہی جیسی کہ (ص م)^ر رقم جون مقادیر ا و ب و س ... مین سی م مقادیر کے ممکن انتخابات سی بنتی ہی تو اب ہم یہہ ثابت کرینگے کہ اگر ر چھوٹا ن سی ہو تو ح = ۰ اور اگر ن برابر یا بڑا بہ نسبت ن کی ہی تو ح پورا ا ب س ... پر تقسیم ہوگا اور خاص کر

ح = |ن ا ب س ... جب ر = ن

اور ح = (|ن+۱ / ۲) (ا + ب + س + ...) ا ب س ... جب ر = ن + ۱

ہم صح کو دو حصوں میں جدا جدا کرتی ہیں ایک وہ جسکی ہر رقم میں ا واقع ہوتا ہے اور دوسرا وہ حصہ ہے جسمیں انہیں واقع ہوتا تو ہم پہلی حصہ کو اسطرح لکہ سکتی ہیں کہ

$$(ص_ن)^ر - ح_۱(ص_{ن-۱})^ر + ح_۱(ص_{ن-۲})^ر - \ldots + (-۱)^{ن-۱} ا^ر$$

اور دوسرے حصہ کو

$$-ح_۲(ص_{ن-۱})^ر + ح_۲(ص_{ن-۲})^ر - \ldots + (-۱)^{ن-۱} ح_۲(ص_۱)^ر$$

اسمیں $ح_۱$ سی وہ خاص مقادیر تعبیر ہوتی ہیں جو پہلی ح کی ماتحت تہیں اور $ح_۲$ سے باقی ارقام تعبیر ہوتی ہیں اب فرض کرو کہ ا = ۰ تو صح معدوم ہوتا ہی کیونکہ اس صورت میں

$$(ص_ن)^ر - ح_۲(ص_{ن-۱})^ر = ۰$$

$$ح_۱(ص_{ن-۱})^ر - ح_۲(ص_{ن-۲})^ر = ۰$$

$$ح_۱(ص_{ن-۱})^ر - ح_۲(ص_{ن-۲})^ر = ۰$$

اور اسیطرح ہم ثابت کرسکتی کہ جب ب = ۰ اور س = ۰ کے تو صح معدوم ہوتا ہی اور علی ہذا القیاس پس ہم یہہ نتیجہ نکالتی ہیں کہ صح اکثر مقادیر ا و ب و س ۰۰ میں سے ہریک پر تقسیم ہوتا ہی اور اسیواسطی انکی حاصل ضرب پر لیکن حاصل ضرب ن درجی کا ہی اور اسیواسطی اگر صح ن درجی سی کم ہو تو وہ از روی تطابق کی صفر ہوگا اور صح ر درجی کا ہے تو اسی یہہ مستنبط ہوتا ہی کہ جب ر کم بہ نسبت ن درجی کی ہو تو صح معدوم ہوتا ہے اور جب ر کم ن سے نہ ہو تو وہ پورا ا ب س ۰۰ پر تقسیم ہوتا ہے جب ر = ن تو صح = ل ا ب س ۰۰ کی حاصل ہوگا اسمین ل کوئی عددی مقدار ہے اسکو تشخیص کرنا چاہیئی اب ل کے تشخیص کرنی کی واسطی فرض کرو کہ ا و ب و س ۰۰۰ میں ہریک برابر واحد کے ہے تو صح یہہ ہوجایگا کہ

$$ن^ن - ن(ن-۱)^ن + \frac{ن(ن-۱)}{۱\times۲}(ن-۲)^ن - \ldots$$

یعنی $ل^ن$ بموجب جبر مقابلہ کے انتالیسوین باب کے

دوم فرض کرو کہ ر = ن + ۱ تو صح پورا اب س . . پر تقسیم ہوگا اور
چونکہ صح ن + ۱ درجے کا ہی تو اوسکا ایک جز ضربی ایک درجہ کا ہو جو بلحاظ
ا و ب و س . . . ایک قرینہ رکھتا ہوگا اسواسطی یہہ جز ضربی ا + ب + س . . ہوگا
اسی معلوم ہوا کہ صح = لب اب س . . . (ا + ب + س) + . . اسمین لب کوئی عددی
مقدار ہی اوسکا تشخیص کرنا چاہئی لب کی تشخیص کرنی کی واسطی فرض کرو کہ ا و ب و س . .
وغیرہ مین ہر یک برابر واحد کے ہے تو

$$صح = ن^{ن+۱} - (ن-۱)^{ن+۱} + \frac{ن(ن-۱)}{۱ \times ۲}(ن-۲)^{ن+۱} - \ldots$$

اور یہہ برابر لب ن کے ہی معلوم ہوا کہ موافق باب ۳۹ باب جبر مقابلہ کے لب = $\frac{ن+۱}{۲}$

(۲۹۴) فرض کرو کہ $[س]_ر$ تعبیر س (س - ۱) (س - ۲) . . (س - ر + ۱)
کو کرتا ہے اور س خواہ کچھ ہی ہو تو

$$[ا+ب]_ن = [ا]_ن + ن[ا]_{ن-۱}[ب] + \frac{ن(ن-۱)}{۱ \times ۲}[ا]_{ن-۲}[ب]_۲ + \ldots + [ب]_ن$$

اسواسطی کہ فرض کرو ا مثبت صحیح مقدار ہی تو یہہ ہم کو معلوم ہی کہ یہہ مسئلہ صحیح ہی خواہ ب کی
کوئی مثبت صحیح قیمت ہو کیونکہ $(۱+لا)^{ا+ب}$ اور $(۱+لا)^{ا} \times (۱+لا)^{ب}$ مین امثال
$لا^{ن}$ کے مساوات سی یہہ نتیجہ استخراج ہوتا ہی پس اسی معلوم ہوا کہ ب کی ن قیمتوں
سی زیادہ قیمتوں کی واسطی بھی یہہ مسئلہ ازروی تطابق کے بموجب دفعہ ۳۹ کے
صحیح ہی یعنی جب ا کوئی مثبت صحیح مقدار ہی تو ب کی تمام قیمتوں کی صورتوں مین مسئلہ صحیح ہے
اور چونکہ کوئی مثبت صحیح ا کے واسطی مسئلہ صحیح ہی تو وہ ا کی ن قیمتوں سی زیادہ
قیمتوں کی واسطی صحیح ہی اور اسیواسطی بموجب دفعہ ۳۹ کے وہ ا کی تمام قیمتوں کے واسطے صحیح ہے
غرض یہہ سلسلہ اسطرح صحیح ثابت ہوتا ہی کہ ضابطہ جملہ ثنائی کو مثبت صحیح قوت نما کی صورت
مین فرض کرلیں اور پہر دفعہ ۳۹ کی ضابطہ کو بھی صحیح مان لیں اس مسئلہ کا نام کبھی وانڈرمونڈ
بھی لیا جاتا ہی جب نولیر کا ضابطہ ثنائی اوس حالت مین ثابت کرتے ہیں کہ قوت نما

کچھہ ہی ہو تو اس مسئلہ کا وہان کام پڑتا ہی اور یہہ بات مشہور ہی اور وہان اس مسئلہ کو موافق اصول مستقل صور متشابہ کے قائم کیا ہے

(۲۹۵) فرض کرو کہ مساوات مح (لا) = ۰ کی ایک قیمت ا ہی تو ہم فرض کرسکتی ہین کہ

$$\text{مح (لا)} = (\text{لا} - \text{ا})\ \text{مر (لا)}$$

تو

$$\frac{\text{مح (لا)}}{\text{لا}} = \left(1 - \frac{\text{ا}}{\text{لا}}\right) \text{مر (لا)}$$

$$\text{لوک}\ \frac{\text{مح (لا)}}{\text{لا}} = \text{لوک}\left(1 - \frac{\text{ا}}{\text{لا}}\right) + \text{لوک مر (لا)}$$

$$= -\left(\frac{\text{ا}}{\text{لا}} + \frac{1}{2}\frac{\text{ا}^2}{\text{لا}^2} + \cdots\right) + \text{لوک مر (لا)}$$

فرض کرو کہ لوک $\frac{\text{مح (لا)}}{\text{لا}}$ کو ایسی سلسلہ مین پہیلائین کہ اوسمین لا کی مثبت اور منفی قوا ملتف ہون اور لوک مر (لا) کو اسی سلسلہ مین پہیلائین کہ اوسمین صرف لا کی مثبت قوتین ہون تو پہر مساوات کی دونو ارکان کا تطابق فرض کرین تو یہہ نتیجہ حاصل ہوگا کہ

− ا = امثال $\frac{1}{\text{لا}}$ کی جو صورت مفصلہ لوک $\frac{\text{مح (لا)}}{\text{لا}}$ مین ہون

(۲۹۶) دفعہ بالا کی مسئلہ کو مرفی صاحب نی اپنی رسالہ مسائل معادلات مین لکہا ہے اس مسئلہ کا اثبات ناقص ہی کیونکہ سلسلہ غیر متناہی صورت مفصلہ کا انفراجی ہوسکتا ہے اس مسئلہ پر بڑی بڑی کتابون مین بحث لکہی ہے

(۲۹۷) مثلاً فرض کرو کہ اس مساوات

$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{س لا} - \text{ب} = 0$ کی ایک قیمت دریافت کرو

یہان $\frac{\text{مح (لا)}}{\text{لا}}$ س − $\frac{\text{ب}}{\text{لا}}$ + $\text{لا}^{\text{ن}-1}$

$$\text{لوک}\ \frac{\text{مح لا}}{\text{لا}} = \text{لوک س} + \text{لوک}\left(1 - \frac{\text{ب}}{\text{س لا}} + \frac{\text{لا}^{\text{ن}-1}}{\text{س}}\right)$$

$$= \text{لوک س} - \text{ی} - \frac{1}{2}\text{ی}^2 - \frac{1}{3}\text{ی}^3 - \cdots$$

$$\text{جسمین ی} = \frac{\text{ب}}{\text{س لا}} - \frac{\text{لا}^{\text{ن}-1}}{\text{س}} = \frac{\text{ب}}{\text{س لا}}\left(1 - \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ب}}\right)$$

اب ہم کو اون ارقام کا التقاط کرنا چاہئی جسمین $\frac{1}{\text{لا}}$ ملتف ہو تو ہم ایک ایسی رقم

ی سی اور ی^ن+۱ سی اور ی^ن+۱ سی اور علی ہذا القیاس حاصل کر سکتی ہین

پس اسی معلوم ہوا کہ قیمت دریافت کرنی کیواسطی یہہ سلسلہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{ب}{س} - \frac{ن}{س^{ن+۱}} + \frac{ن^۲}{۲} \cdot \frac{ب^{ن+۱}}{س^{۲ن+۱}} - \frac{ن(۳ن-۱)}{۲ \times ۳} \cdot \frac{ب^{۳ن-۲}}{س^{۳ن+۱}} + \dots$$

(۲۴۸) فرض کرو کہ مساوات مح (لا) = ۰ کی قیمتین ا۱ و ا۲ ۰ ۰ ام ہین پس ہم فرض کر سکتی ہین کہ

$$مح (لا) = (لا - ا_۱)(لا - ا_۲) \dots (لا - ا_م) مر (لا)$$

$$تو \frac{مح (لا)}{لا^م} = (۱ - \frac{ا_۱}{لا})(۱ - \frac{ا_۲}{لا}) \dots (۱ - \frac{ا_م}{لا}) مر لا$$

طرفین مساوات کی لوکارثم لو تو بموجب دفعہ ۲۴۵ کے ہم کو یہہ نتیجہ حاصل ہوگا کہ

$-(ا_۱ + ا_۲ + \dots + ا_م)$ برابر مثال $\frac{۱}{لا}$ کے ہے جو صورت مفصلہ

لوک $\frac{مح (لا)}{لا^م}$ مین ہو مرفی صاحب کے رسالہ مسائل معادلات کو دیکھو

(۲۴۹) ایک کسر ناطقہ کی تحلیل کرنی کا اور کسور مین بیان کرتی ہین ایسی کسور کو بلحاظ اصلی کسور کے کسور جزئیہ کہتی ہین

فرض کرو کہ ن درجہ کا جملہ لا کا مح (لا) ہی اور مساوات مح (لا) = ۰ کی سب قیمتین غیر مساوی ہین

اور ا و ب و س ۰ ۰ سی تعبیر ہوئی ہین اور مر (لا) ایک جملہ لا کا (ن - ۱) درجہ کا

یا اوسی بھی ادنی درجہ کا ہی تو یہہ ارتباط ازروی تطابق کی صحیح ہوگا کہ

$$\frac{مر (لا)}{مح (لا)} = \frac{ا}{لا - ا} + \frac{ب}{لا - ب} + \frac{س}{لا - س} + \dots + \frac{ک}{لا - ک}$$

بشرطیکہ مستقل قیمتین ا و ب و س و ۰ ک کے واسطے مقرر کیجائین

اب تا کہ یہہ ارتباط ازروی تطابق کی صحیح ہو تو یہہ ضروری اور کافی ہی کہ ازروی تطابق کے یہہ صحیح ہو کہ

$$مر (لا) = ا \frac{مح لا}{لا - ا} + ب \frac{مح (لا)}{لا - ب} + س \frac{مح (لا)}{لا - س} \dots + ک \frac{مح (لا)}{لا - ک}$$

ارکان اس مساوات کی ن - ۱ درجی سی بڑسی درجی کی نہین ہین اسی معلوم ہوا کہ یہہ ارتباط

ازروی تطابق کی صحیح ہوگا اگر ن قیمتین لا کی وہ دریافت ہو جائین جنکی واسطی وہ صحیح ہے

دفعہ ۳۰۹ دیکھو اور ا و ب اور س ۰ ۰ ک مین مناسب انتخاب کر کے ارتباط

کو صحیح لا کی ن قیمتون ا و ب و س ۰ ۰ ک کی واسطی کر سکتی ہین اسواسطے کہ

فرض کرو لا = ا سی تمام ارقام بایئں طرف معدوم ہوجاتی ہین الا وہ مقدار جسمین ا ملتق ہی اور ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$مر(ا) = ا \left[\frac{مر لا}{لا - ا}\right]_{لا = ا}$$

یعنی بموجب دفعہ ۲۸۷ کے

$$مر(ا) = ا حَ(ا)$$

اسی ا قطعی دریافت ہوتا ہی اور اسیطرح قیمتین ا و ب و س ۔ ک کی دریافت ہوتی ہین

(۳۰۰) اب فرض کرو کہ مر (لا) درجہ ادنی کا بہ نسبت حَ (لا) کے نہین ہے تو معمولی تقسیم کے قاعدہ سی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{مر(لا)}{حَ(لا)} = ح(لا) + \frac{ح(لا)}{حَ(لا)}$$

اسمین ح (لا) اور ح (لا) جملی صحیحہ لا کی ہین اور ح (لا) کا درجہ ادنی بہ نسبت حَ (لا) کے ہی اب $\frac{ح(لا)}{حَ(لا)}$ موافق دفعہ گذشتہ کی تحلیل کسور جزئیہ مین کرین

چونکہ ہم کو یہہ معلوم ہے کہ

$$مر(لا) = ح(لا) ح(لا) + ح(لا)$$

اسی یہہ استخراج ہوتا ہی کہ مر (لا) اور ح (لا) کی ایک ہی قیمت ہی جب حَ (لا) معدوم ہو اسی معلوم ہوا کہ کسور جزئیہ مطابق $\frac{مر(لا)}{حَ(لا)}$ کی تشخیص موافق دفعہ ۲۹۹ کے ہوسکتی ہین پہلی اسی کہ ہم مر (لا) کو حَ لا پر تقسیم کرین اگر $\frac{مر(لا)}{حَ(لا)}$ کی کامل قیمت دریافت کرنی ہوتی تو ہم کو جزو ح (لا) کو ساقط کرنا نہ چاہیی تہا

(۳۰۱) ہم نتایج کو دقت سی خالی کرنی کی لئی دفعات گذشتہ مین کسر ناطقہ کے تحلیل کرنے کا طریقہ کسور جزیہ مین اوس صورت مین بیان کیا ہی کہ اونمین اجزا ضربی مکرر نہین اتے یہہ ایک خاص صورت تہی اب ہم علی العموم اسکی تحقیقات کرتے ہین

(۳۰۲) فرض کرو کہ حَ (لا) ایک جملہ لا کا ہی جسمین اجزا ضربی مکرر اتی ہین مثلاً فرض کرو کہ

مح (لا) = ع (لا − اَ)^ر (لا − بَ)^س (لا − سَ)^ط ... (لا − کَ)

اور مر (لا) کا درجہ لا کا ہی تو جملہ $\frac{\text{مر (لا)}}{\text{مح (لا)}}$ اجزاء ذیل مین تحلیل ہو سکتا ہی (۱) کوئی جز ضربی لا − کَ جو مکرر نہین آتا اوسی ایک رقم $\frac{\text{ک}}{\text{لا − کَ}}$ پیدا ہو گی (۲) جز ضربی (لا − اَ)^ر سے یہہ سلسلہ ارقام پیدا ہو گا کہ

$$\frac{ا}{(لا-اَ)^ر}+\frac{ا_1}{(لا-اَ)^{ر-1}}+\frac{ا_2}{(لا-اَ)^{ر-2}}+\dots+\frac{ا_{ر-1}}{لا-اَ}$$

اور اسی طرح کا سلسلہ ارقام اور ہر ایک جز ضربی مکررہ سی پیدا ہو گا (۳) اگر هر (لا) ادنی درجہ کا مح (لا) سی نہین ہو گا تو ایک جملہ صحیحہ بہی پیدا ہو گا

اسواسطی کہ فرض کرو کہ مح (لا) = (لا − اَ)^ر هر (لا) تو اخواہ کچہ ہی ہو از روی تطابق کے

$$\frac{مر(لا)}{مح(لا)}=\frac{ا}{(لا-اَ)^ر}+\frac{مر(لا)-ا\,هر(لا)}{مح(لا)}$$

اب فرض کرو کہ مر (اَ) − ا هر (اَ) = ۰ تو مر (لا) − ا هر (لا) جب لا = اَ کے ہو معدوم ہو گا اور اسیواسطے لا − اَ پر پورا تقسیم ہو گا
اسیواسطے ا کے اس قیمت کے موافق ہم یہہ رکہہ سکتی ہین کہ

$$مر(لا)-ا\,هر(لا)=(لا-اَ)\,مر_1(لا)$$

اور اسیواسطے

$$\frac{مر(لا)}{مح(لا)}=\frac{ا}{(لا-اَ)^ر}+\frac{مر_1(لا)}{(لا-اَ)^{ر-1}\,هر(لا)}$$

اسی طرح سی آخر کسر کی تحلیل کر کے یہہ حاصل کر سکتی ہین کہ

$$\frac{مر_1(لا)}{(لا-اَ)^{ر-1}\,هر(لا)}=\frac{ا_1}{(لا-اَ)^{ر-1}}+\frac{مر_2(لا)}{(لا-اَ)^{ر-2}\,هر(لا)}$$

پس اسی طریقہ سی بار بار عمل کرنے سے نتیجہ مطلوب قائم ہو جائیگا

(۳۰۴) دفعہ ۳۷ کی طرح یہہ ثابت کرنا آسان ہی کہ $\frac{\text{مر (لا)}}{\text{مح (لا)}}$ کی تحلیل صحیحہ جملون مین ایک ہی طرز پر ہو سکتی ہی اور کسور جزئیہ کا ایک سلسلہ ہوتا ہی جسکی نسبتًا مین ایک جداگانہ ہی جز ضربی ملتفت ہوتا ہے، اسی معلوم ہوا کہ آخر کو نتیجہ ایک ہی حاصل ہو گا خواہ عمال کی ترتیب کچہ ہی ہو

یعنی خواہ کسی جز ضربی پر اول ہم عمل کریں

عملاً عمدہ طریقہ کسور جزئیہ کے شمار کنندوں کے دریافت کرنے کا ذیل میں لکھا جاتا ہے کہ لا = ا + ھ کی رکھو تو

$$\frac{\text{مر}(\text{لا})}{\text{مح}(\text{لا})} = \frac{\text{مر}(\text{لا})}{(\text{لا}-\text{ا})\,\text{ھر}(\text{لا})} = \frac{\text{مر}(\text{ا}+\text{ھ})}{\text{ھ}\,\text{ھر}(\text{ا}+\text{ھ})}$$

اب کسی ترکیب سے یعنی $\frac{\text{مر}(\text{ا}+\text{ھ})}{\text{ھر}(\text{ا}+\text{ھ})}$ کو قوا ھ میں پھیلاؤ تو بموجب طریقہ کتاب کی جو اوپر بیان ہوا ہے یہہ نتیجہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{\text{مر}(\text{ا}+\text{ھ})}{\text{ھر}(\text{ا}+\text{ھ})} = \text{ا} + \text{ا}_1\text{ھ} + \text{ا}_2\text{ھ}^2 + \text{ا}_3\text{ھ}^3 + \cdots$$

یعنی $\frac{\text{مر}(\text{ا}+\text{ھ})}{\text{ھر}(\text{ا}+\text{ھ})}$ کی صورت منفصلہ میں جو موافق قوا متصاعدہ ھ کے ہو لا مثال ھ کم کے ہیں اور اسیطرح سے اور کسور جزئیہ کے شمار کنندوں کو مقرر کرو

(۳۰۴) اب دفعات ذیل میں مسائل لکھی ہیں جنسے کہ مساوات کی قیمتوں کی حدود غائی معلوم ہوں وہ پروفیسر ڈی مورگن نے چہٹی مورخہ ۱۲ فروری ۱۸۵۸ع میں لکھکر بھیجی تھی

(۳۰۵) اس مسئلہ میں مساوات کی قیمتوں کی حدود غائی کی دو ترکیبیں جو باب ہفتم میں بیان ہوئی ہیں داخل ہیں اور اون پر کچھ اور مزید ہے

فرض کرو کہ ح (لا) = ع لا$^{\text{ن}}$ + ع$_1$ لا$^{\text{ن}-1}$ + ۰۰ + ع$_{\text{ن}-1}$ لا + ع$_{\text{ن}}$

اب ہم کو مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتوں کی اعلی حد غائی دریافت کرتے ہیں

فرض کرو کہ لا$^{\text{ع}}$ برابر اول رقم کے امثال ہو یا وسی کسی کم شی کا اور ب کم از کم مثبت امثال او سکے ما بعد اور کسی منفی امثال کا ماقبل ہو یا وسی کسی کم شی کا اور س برابر سب سے بڑی منفی امثال کے عددی قیمت کی ہو یا اوسی کسی بڑی شی کی

اور فرض کرو کہ لا$^{\text{ن}-\text{ک}-1}$ اول رقم ہی جسکی امثال منفی ہیں تو ح (لا) یقینی مثبت ہوگا اگر جملہ ذیل مثبت ہو کہ

(لا$^{\text{ع}}$ + ب (لا$^{\text{ع}-1}$ + ۰۰ + لا$^{\text{ع}-\text{ک}}$) – س (لا$^{\text{ن}-\text{ک}-1}$ + ۰۰ + لا + ۱)

یعنی جب جملہ ذیل مثبت ہو کہ

$$ا لا^{ن} + ب \frac{لا^{ن} - لا^{ن-ک}}{لا - ا} - س \frac{لا^{ن-ک} - ا}{لا - ا}$$

یعنی لا کو بڑا واحد سے فرض کر کے

$$\{ا (لا - ا) + ب\} لا^{ک} - (ب + س) لا^{ن-ک} + س$$

مثبت ہے یعنی یہ بدرجہ اولی مثبت ہے جب

$$\{ا (لا - ا) + ب\} لا^{ک} - (ب + س)$$

صفر یا مثبت ہو

(۱) فرض کرو کہ ب = ۰ اور س تعداد ا سے بڑا منفی مثال ہی تو ح (لا) مثبت ہے اگر ا (لا - ۱) - س صفر یا مثبت ہی یعنی اگر لا = ۱ + $\frac{س}{ا}$ یا اسی بڑی شئی کی برابر ہو دفعہ ۷ ۸ دیکھو

(۲) فرض کرو کہ ب = ۰ اور س تعداد ا سے بڑا منفی مثال ہو تو ح (لا) مثبت ہوگا اگر ا (لا - ۱) لا^ک - س صفر یا مثبت ہی اور اسیو اسطے بدرجہ اولی وہ مثبت ہوگا اگر ا (لا - ۱)^{ک + ۱} - س ایسا ہو یعنی اگر لا = ۱ + $(\frac{س}{ا})^{\frac{1}{ک+1}}$ یا کسی بڑی شے کے دفعہ ۸۹ دیکھو

(۳) ا کی جگہ صفر رکھو تو ح (لا) مثبت ہوگا اگر ب لا^ک - (ب + س) صفر یا مثبت ہے یعنی اگر لا = $(۱ + \frac{س}{ب})^{\frac{1}{ک}}$ یا کسی بڑی شئی کی یہہ ایک نئی حد غائی ہی جو چھوٹی به نسبت (۲) کے ہی جب ب بڑی ع بے مقرر کیجاے

(۴) اگر ا بڑا به نسبت ب کے نہ ہو تو ح (لا) مثبت ہے اگر

$$\{ا (لا - ا) + ا\} لا^{ک} - (ا + س)$$

صفر ہے یا مثبت ہی یعنی اگر لا = $(۱ + \frac{س}{ا})^{\frac{1}{ک+1}}$ یا کسی بڑی شئے کے اور اسی چھوٹی حد به نسبت (۳) کے معلوم ہوتی جب ب چھوٹی ع سی نہ مقرر کیجاے

(۵) فرض کرو کہ ب چھوٹا س سی نہیں ہی تو اس سی ہم کو اعلی حد غائی ۲ ک^{$\frac{1}{ک}$} حاصل ہوگی

(۶) فرض کرو کہ ا چھوٹا س سی نہیں ہی تو (۲) سی ۱ + ۲ ک^{$\frac{1}{ک+1}$} اعلی حد غائی حاصل ہوگی

(۷) فرض کرو کہ ن ا ن ب چہوٹا اس سی ہی تو (۴) سی ہم کو ۲ ک + ۱ اعلی حد غائی حاصل ہوگی

(۳۰۱۴) اب ہم مساوات کی قیمتوں کی حدود غائی کی باب مین ایک اور مسئلہ لکھتی ہین وہ موقوف اسی جملہ ا لا^ن + ب لا^ن-۱ + س لا^ن-۲ + ۰۰ کی قیمت کے حساب لگانے پر موقوف ہی اور اس حساب کی ترکیب موافق قیمت معینہ لا کے دفعہ ہ مین بیان ہوئی ہی اگر سر ایک قیمت معینہ کو تعبیر کرتی ہی تو حساب سی متواتر یہہ حاصل ہوگا کہ

ا بر د ا بر + ب و (ا بر + ب) سر و (ا سر + ب) سر + س ۰۰۰

فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ مساوات ہی اب ح (لا) کی جماعتین اسطرح بناؤ کہ ہر یک جماعت مین مثبت رقمین اور اوسکی اگی وہ منفی رقمین ہون جو ماقبل کی آئی والی مثبت رقموں کی ہون اب فرض کرو کہ فقط علامتون ہی کے لکھتی سی یہہ ہوا تر حاصل ہو کہ

+ + − − − + − + + − − − − + − − − +

اب اسکی جماعتین اسطرح بناؤ کہ

(+ + − −) و (+ −) و (+ + − − − −) و (+ − − −) د +

فرض کرو کہ اول جماعت مین قوای لا کے لا^ن سے لا^ن-ع تک ہین اور یہہ دو قوای سکے داخل ہین فرض کرو کہ جزضربی لا^ن-ع تقسیم کرنی سی ساقط کیا گیا اور امتحان سی لا کی ایک قیمت بر مقرر کرو اور جب لا = بر کے ہو تو خارج قسمت کا حساب بعد از تقسیم لا^ن-ع کے کرو اگر نتیجہ مثبت ہی تو اوسکو ا سی تعبیر کرو اور ا لا^ن-۱ کو دوسری جماعت کا سر بناؤ اور فرض کرو کہ یہہ جماعت اوس رقم تک جسمین لا^ن-ک ملتف ہی پہلتی ہے پس جب ا لا^ن-ک دوسرے جماعت مین سب سے اول مقرر کیا گیا ہو تو لا^ن-ل پر تقسیم کرو اور جب لا = سر ہو تو قیمت خارج قسمت کا حساب کرو اور اوسکو ا۲ سی تعبیر کرو اور ا۲ لا^ن-ل کو جماعت مابعد مین سب سے اول لکھو اور علی ہذا القیاس اگر تمام نتیجے اخر تک مثبت ہون تو بر اعلی حد غائی مثبت قیمتوں کی ہوگی اور عدد سر کا اسان قواعدین سی موافق ایک قاعدہ کے منتخب ہو سکتا ہے

اس بات کو یاد رکھنا چاہیے کہ جب اول ہی جماعت کا حساب کرو تو اوسی جو اعلی حد غائی دریافت ہوگی اوسی بہت بڑا عدد مطلوب بر نہیں ہوگا

مثلاً مساوات اٹھارہ درجی کی ہی تو اب ہم صرف امثال کو جماعتوں میں لکھتے ہیں کہ

(۷ + ۴ + ۳ − ۳ − ۸۰ − ۱۰۰) + (۲۰ − ۱۰۰) + (۳ + ۲ + ۱ − ۴۰ − ۱۰۰۰ − ۱۰۰۰)

+ (۷۰ − ۸۰۰۰ − ۲۰۰۰) + (۱۰۰ − ۴۰۰ − ۴۰۰۰)

اول جماعت پر خیال کریں تو یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ۲ مثبت چہوٹا عدد ہی اعلی ۳ پر امتحان کرنا چاہئے

اب ہم قیمت

۷ لا۴ + ۴ لا۳ + ۳ لا۲ − ۸۰ لا − ۱۰۰

کا جب لا = ۳ کے ہو حساب کریں

۷	۴	۳	−۸۰	−۱۰۰
۷	۲۵	۷۸	۱۵۴	۳۶۲

پس ا۱ = ۳۶۲

اب ہم قیمت

۳۶۲ لا۲ + ۲۰ لا − ۱۰۰

کا جب لا = ۳ کے ہو حساب کرتے ہیں

۳۶۲	۲۰	−۱۰۰
۳۶۲	۱۱۰۶	۳۲۱۸

پس ا۲ = ۳۲۱۸

اب قیمت

۳۲۱۸ لا۶ + ۳ لا۵ + ۴۴ لا۴ + لا۳ − ۴۰ لا۲ − ۱۱۰۰۰ لا − ۱۰۰۰ کا

کا حساب جب لا = ۳ کے ہو کرتے ہیں

اب یہہ ظاہر ہی کہ ہم کو تمام نتایج ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ مثبت حاصل ہونگے پس اسی معلوم ہوا کہ ۳ مثبت قیمتوں کی اعلی حد غائی ہے

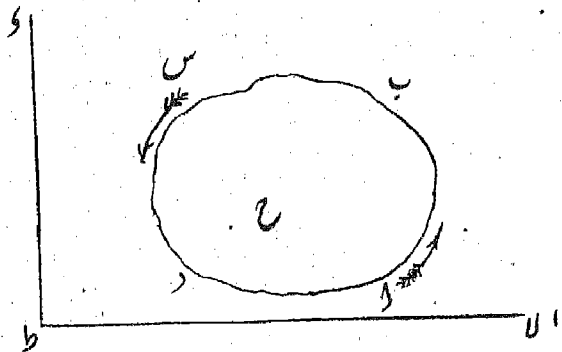
اس مثال میں ہوافق دفعہ ۹ کے اعلی حد غائی ۱ + ۸۰۰۰ ۱۱ یعنی یہہ بڑا ۷ سے ہے
اور بموجب دفعہ ۸۹ کے اعلی حد غائی ۱ + ۳ √ ۸۰۰ ۷ ہی اور یہہ ۱۱ سی زیادہ ہے

الحاصل مختصر بیان اس مسئلہ کا یہہ ہی کہ تمام جملی کو متواتر مثبت اور صحیح جماعتون
لاع - ب لا ن + س لار - د ص ... مین تقسیم کرو اور ہر جماعت مین لا کا قوت تما اخر لکھو
اور لاع - ب لا ق کو لا ق پر تقسیم کرو اور کوئی قیمت لا کی مثلاً ر ایسی دریافت کرو
کہ وہ خارج قسمت کو مثبت بنائی اور فرض کرو کہ یہہ خارج قسمت ل ہو ل لا ق + س لار - د ص کو
لا ص پر تقسیم کرو اور کوئی قیمت لا کی لس جو شاید ر سی بڑی نہ ہو اور چھوٹی ر سی تو ہونی نہین چاہئے
ایسی دریافت کرو جو خارج قسمت کو مثبت بنا ہی فرض کرو کہ م یہہ خارج قسمت ہو
اب پہر عمل کو م لا ص + ی لا ط - ف لا ق پر جاری کرو اور علی ہذا القیاس اخر تک یہی عمل جاری رکہو
تو لا کی اخر قیمت اسطرح حاصل ہو گی وہ مساوات کی ہر یک قیمت سی بڑی ہو گی اور اول قیمت
لا کی یعنی ر اکثر اخر قیمت یہے ہوتی ہے

(۳۰۷) ایک مسئلہ کاچی صاحب کا لکھکر اس باب کو ختم کرتی ہین مطلب اس مسئلہ کا یہہ ہے
کہ حدود معینہ کی درمیان یہہ دریافت کرین کہ کتنی حقیقی اور کتنی خیالی قیمتین واقع ہوتی ہین
سٹرم صاحب کی ضابطہ مین خاص حقیقی قیمتون کی نسبت بیان کیا گیا ہی وہ یہان اس مسئلہ مین
علی العموم خیالی اور حقیقی قیمتون کی واسطی بیان کیا جاتا ہی غرض ضابطہ مخصوص حقیقی قیمتون کی واسطے تہا
اور یہہ مسئلہ علی العموم سب قیمتون کے واسطے ہے

(۳۰۸) کوئی قائم الزاویہ محور مقرر کرو اور لا اور ر محددین کسی نقطہ کے مقرر کرو اور
مح (ی) کوئی جملہ ناطقہ ی کا فرض کرو تو مح (لا + ر √-۱) اس صورت ع + ق √-۱
مین بیان ہو سکتا ہی جو نقطہ ایسا ہے کہ جسکی محددین ع اور ق کو ایکساہی وقت مین معدوم کر دیتی ہے
اوسکا نام نقطہ اصلی رکہو اور ایک حاطہ ا ب س دکھینچو تو تعداد نقاط اصلی کی جو
اس حلقہ کی درمیان واقع ہونگی قاعدہ ذیل سی دریافت ہو جائینگی فرض کرو کہ ایک نقطہ اس

احاطہ کی گرد مثبت سمت مین حرکت کرنا چاہی اور اس بات کو گنتے جاؤ کہ کتنی دفعہ ع
کی نوبت صفر پہ پہونچتی ہی اور اوسکی علامت تبدیل ہوتی ہی فرض کرو کہ ک دفعہ اوسکی علامت
+ سی - اور ل دفعہ - سی + ہی تو تعداد نقاط اصلی کی احاطہ کے اندر
½ (ک - ل) ہو گی

ی س ب علا ح د ا ط ا ل

اس بات پر خیال کرنا چاہیے کہ احاطہ اب مقرر کیا گیا ہی کہ کوئی نقطہ اصلی اوسکی اوپر نہیں واقع ہوتا
اور اگر کوئی خیالی قیمت مساوات ح (ی) = ۰ دو دفعہ یا تین دفعہ یا زیادہ دفعہ آئی تو ہم کو یہہ خیال کرنا چاہیے
کہ دو یا تین یا زیادہ اصلی نقطے ہین اگرچہ وہ منطبق ایک دوسرے پر ہونگے اور مثبت سمت مین حرکت
کرنی سی مراد ہماری یہہ ہی کہ ایک نصف قطر دائر ایک نقطہ قائم سی حلقہ کی اندر نقطہ متحرک تک کہینچا گیا
ایک وہ چار قائموں کی برابر مثبت زاویہ پر گذرتا ہی اور نقطہ متحرک گرد حلقہ کے گذرتا ہے
اس مسئلہ کی ثابت کرنی کی لئی اول صورت بی نہایت ہی چہوٹی احاطہ کی لیتی ہین اور پہر
ایک صورت احاطہ محدود کی لیتے ہین

(۳۰۹) احاطہ کی اندر کوئی نقطہ ح جو نقطہ اصلی نہ ہو مقرر کرو اور ایک نہایت ہی چہوٹا احاطہ
جسمین ح بہی داخل ہو مرتسم کرو اور فرض کرو کہ نقطہ متحرک مثبت سمت مین اس نہایت
ہی چہوٹی احاطہ کی گرد حرکت کرتا ہی تو ہم کو اب چار صورتون پر بحث کرنی چاہیئے
(۱) فرض کرو کہ نہ ع نہ ق اس احاطہ کی اندر نہ اس احاطہ کے اوپر معدوم ہوتی ہین

یہان سیح کی تمام دور میں علامت نہین بدلتی تو قاعدہ سی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ کوئی اصلی نقطہ
احاطہ کی درمیان نہین ہی اور یہہ صحیح ہی ہی کیونکہ ع اور ق معدوم نہین ہوتے

(۲) فرض کرو کہ احاطہ کی اندر نہ احاطہ کی اوپر ق معدوم ہوتا ہی مگر ع معدوم ہوتا ہے
اس صورت مین سیح علامت وہان بدلتا ہی جہان نقطہ متحرک ایسی مقام پر گذرتا ہی جہان ع معدوم ہوتا ہے
لیکن انجام دورہ پر ع اپنی اصلی علامت پر اجاتا ہی تو اسی معلوم ہوتا ہی کہ جتنی تغیر + سی - کے ہوئی ہونگی اوتنی تغیر - سی + کے ہوئی ہونگی اسی معلوم ہوا کہ ک اور ل برابر ہین اور قاعدہ سی ظاہر ہوتا ہی کہ کوئی اصلی نقطہ احاطہ کی درمیان نہین واقع ہوتا اور یہہ صحیح ہی کیونکہ ق معدوم نہین ہوتا

(۳) فرض کرو کہ نہ احاطہ کی اندر اور نہ احاطہ کی اوپر ع معدوم ہوتا ہی لیکن ق معدوم ہوتا ہے اس صورت مین سیح کبھی معدوم نہین ہوگا اب قاعدہ سی یہہ معلوم ہوتا ہے کہ کوئی نقطہ اصلی احاطہ کے اندر نہین ہے اور یہہ صحیح ہے کیونکہ ع معدوم نہین ہوتا

(۴) فرض کرو کہ ع اور ق دونو احاطہ کی اندر اور اوپر معدوم ہوتے ہین اگر وہ دونو ایک وقت معدوم نہ ہون تو ہم سطح کو جو احاطہ سی گہری ہوئی ہی اور سطحون مین تقسیم کر دینگے جنمین سے بعض میں ع صرف معدوم ہوتا ہی اور باقی مین صرف ق معدوم ہوتا ہی تو اس سطح سی دو یا زیادہ احاطے بجای ایک احاطہ کی حاصل ہونگی اور اونکی صورت موافق صورت (۲) اور (۳) کے ہوگی پس صرف یہی ایک صورت رہی جسمین ع اور ق دونو ایک ہی وقت معدوم ہوتے ہین اور ایک نقطہ اصلی احاطہ کے اندر یا اوپر ہی اور ہم احاطہ کو ایسا چھوٹا فرض کر سکتی ہین کہ کہ اوسمین صرف ایک ہی نقطہ اصلی واقع ہو اور کوئی اوسکی اوپر نہ ہو

فرض کرو کہ ط اور ص اس اصلی نقطہ کے محددین ہین اور لا = ط + ص جم ر
اور ی = ص + لو جب ر

لا + ی √-۱ = ا + ب √-۱ + لو (جم ر + √-۱ جب ر)

= ط + ص √-۱ + و کے مقرر کرو

اب فرض کرو کہ مساوات مح (ی) = ۰ کی قیمت ط + ص √-۱ م دفعہ مکرر آتی ہے
تو مح (ط + ص √-۱ + و) کی صورت س وم + س۱ وم+۱ + س۲ وم+۲ + ۰۰۰۰۰
کی ہوگی جہاں س د س۱ د س۲ ۰ ۰ خاص خیالی جملی کینڈی کے صورت کے ہیں
پس ہم فرض کر سکتی ہیں کہ

س = ھ (جم سہ + √-۱ جب سہ) اور س۱ = ھ۱ (جم سہ۱ + √-۱ جب سہ۱) ۰ ۰

اسی معلوم ہوا کہ بموجب ضابطہ دی موئور کے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ع / ق = [ھ جم (م بر + سہ) − ھ۱ لق جم [(م + ۱) بر + سہ۱] + ھ۲ لق۲ جم [(م + ۲) بر + سہ۲] + ۰ ۰] / [ھ جم (م بر + سہ) + ھ۱ لق جب [(م + ۱) بر + سہ۱] + ھ۲ لق۲ جب [(م + ۲) بر + سہ۲] + ۰ ۰ ۰]

اب ہم لق کو ایسا چھوٹا فرض کرتی ہیں کہ تغیرات علامت کی تعداد میں لق سی کچھ اثر نہ ہو یعنی
ہم اسطرح عمل کر سکتی ہیں کہ گویا ع / ق = مم (م بر + سہ) اور چونکہ م ایک صفت کہ کسی دوسرے صفت کہ پر
زیادہ ہوتا ہی تو ہمیشہ ایک رستہ صفر کی درمیان ایسا ہوگا کہ وہاں تغیر علامت + سی − ہو گا
پس ہم کو یہہ حاصل ہی کہ ک = ۲م اور ل = ۰ پس ½ (ک − ل) = م کے بموجب قاعدہ کے

(۱۰۳) مسئلہ اوس صورت میں ثابت ہوا کہ احاطہ نہایت ہی چھوٹا تھا اب اگر احاطہ محدود ا ب س د ہو
تو اس احاطہ کو غیر متناہی نہایت ہی چھوٹی چھوٹی احاطوں میں تقسیم کرو اور یہہ احاطے ایسی مقرر کئی گئی
ہیں کہ اونمیں سے نقطہ اصلی کسی ایک پر نہیں واقع ہوتا تو تعداد اصلی نقاط کی احاطہ ا ب س د کی اندر اسطرح
دریافت ہو گی کہ ایک نقطہ مقرر کریں جو ان بی نہایت چھوٹی چھوٹی احاطوں کو مرتسم کرتا ہو اور جو موافق
قاعدہ کی تعداد اصلی نقاط کی حاصل ہوا اونکو جمع کر کی ½ مج (ک − ل) سی تعبیر کریں لیکن یہی نتیجہ
حاصل ہوگا اگر ہم تمام تقسیم کے خطوط اندرونی کو محو کر دیں اور فقط حد ا ب س د کو رہنی دیں
کیونکہ ہر نقطہ جو اندر کے بی نہایت چھوٹی احاطوں میں خط تقسیم پر واقع ہوتا ہی وہ احاطوں سے علاقہ رکہتا ہی
اور اسواسطے وہ مرتسم کرنی والی نقطہ سی دو دفعہ مختلف سمتوں میں تقاطع کرتا ہے
پس اگر ایک صورت علامت ع / ق کی + سی − میں بدلتی ہی تو دوسری صورت میں − سی
+ میں بدلتی ہی اور کل تعداد ½ مج (ک − ل) پر اثر نہیں ہوتا

اسی معلوم ہوا کہ اندر کے خطوط تقسیم محو ہو سکتی ہین اور نقطہ متحرک ک نقطہ احاطہ اب س د
کو مرتسم کرتا ہے
پس مسئلہ ثابت ہوا

(۳۱۱) اب ہم اس مسئلہ سی ایک اور مسئلہ مستنبط کرتی ہین کہ اگر ایک مساوات ن درجہ کی ہو تو اوسکی ن قیمتین ہونی چاہیی فرض کرو کہ احاطہ اب س د ایک دائرہ ہو اور مرکز او سکا مبدء ہو اور اوسکا قطر غیر متناہی بڑا ہو تو قیمت ع کی اوس رقم مع (س) پر موقوف ہی جسمین اعلی قوت ھ کی ملتف ہو اور اگر ہم اوس رقم کو ھ (جم س ه + $\sqrt{-1}$ جب س ه) کی فرض کرین تو ع = مم (ن ہر + س ه) پس ہم کو یہہ حاصل ہو گا کہ ک = ۲ ن اور ق = ۰ پس ½ (ک ـ ل) = ن

(۳۱۲) ہم نی دفعہ ۳۰۸ مین شکل ایسی کہینچی ہی کہ احاطہ کی ہر یک نقطہ اندرونی سے ایک نصف قطر دائر ایک سمت مین کہینچا ہی اور احاطہ سی ایک ہی نقطہ پر ملتا ہے لیکن احاطہ کی قید اس شکل کی ساتھہ ضرور نہین شکل ایسی بہی ہو سکتی کہ نصف قطر دائر ایک سمت مین کہینچا گیا احاطہ سی طاق دفعہ ملاقی ہو

اسی معلوم ہوا کہ جب نقطہ گرد احاطہ کی متحرک ہوتا ہی تو نصف قطر دائر جو نقطہ متحرک ک اور کسی مبدء قائم کے درمیان کہینچا جاوی اور یہہ نقطہ قائم احاطہ کے اندر ہو تو وہ ہمیشہ ایک ہی سمت مین متحرک نہین ہو گا نقطہ متحرک کی مثبت سمت حرکت سی ہم کو سمجہنا چاہیئے کہ گو زاویہ دائر ہمیشہ زیادہ نہ ہوتا ہو مگر اوسیر دورہ مین مثبت زاویہ ۲ ط کی برابر افزایش ہوتی ہو جس ہیئت کی یہان شکل لکہی ہی اوسکی قید کچہہ نہین ہی غرض شکل کا اثر اثبات پر نہین ہے کیونکہ بے نہایت چہوٹی احاطی اگر ہم چاہین تو پہر بہی ایسی فرض ہو سکتی ہین کہ وہ بیضوی ہون جو مبدء مقررہ کو صرف ایک سمت محدودہ مین نصف قطر دائر کہینچا گیا رہکہتی ہون اور اگر ہم اس قید کے بہی پابند نہ رہین تو ہم کو یہہ دیکہنا چاہیئی کہ دفعہ ۳۰۹ کی اخر مین پر ہمیشہ زیادہ نہین ہوتا تو

برکی اسی قیمتین ایسی ہونگین کہ جنکی سبب سی نتیجہ معدوم ہوگا
جنکا ہم کو خیال بہی نہ تہا لیکن اگر ایسا ہوگا تو اتنی ہی وہان تغیرات + سی - اور - سی + بر ہونگے

(۳۱۳) نیز ہم اپنی ساری تحقیقات مین یہہ فرض کیا ہی کہ احاطہ کی اوپر کوئی نقطہ اصلی نہین ہے
اگر نقطہ اصلی احاطہ پر ہو تو ہماری تحقیقات مین کچہ تغیر سوا دفعہ ۳۰۹ کے اخر کے نہین
واقع ہوگا اور یہان فقط اتنا ہوگا کہ سر کے واسطی ۲ کہ کی ترتیب تہی اب صرف ک کی ترتیب ہوگی
اور م تغیرات علامت بجای ۲ م تغیرات علامت کے واقع ہونگے

(۳۱۴) یہہ کاچی صاحب کا ضابطہ پینی انسائی کلوپیڈیا کے مسائل معادلات کے اندر لکہا ہوا ہے
اور پروفیسر ڈی موگن کی علم مثلث اور جبر مقابلہ مین اور انہین صاحب کی اور تحریرات مین
موجود ہی غرض انہین کتابون سی اخذ کرکے یہہ سب کچہ لکہا ہے

پچیسوان باب ادخال مقطعات

(۳۱۵) مسئلہ مقطعات کا اب ہم کچہ بیان کرتی ہین یہہ فرع علم ریاضی کی زمانہ حال کا ایجاد ہے
روز بروز اوسکی ترقی ہوتی جاتی ہی اور بہت بڑی بڑی کام اوسی نکلتی ہین اس باب مین
بعض خاص مثالین اونکی بیان کرینگے اور اونکی توضیح اور تشریح اسطرح کرینگے کہ جسسی طالب علم
مقطعات کی ذات اور صفات کو بخوبی سمجہہ جائین اوسی اگی ایک باب مین مسائل عامہ اس فرع کے
لکہینگے اور پہر ایک باب مین مسائل معادلات مین جو کام اوسی نکلتا ہی اور جسطرح اونکا استعمال ہوتا ہے بیان کرینگے

(۳۱۶) ان معادلات سہم زاد پر خیال کرو کہ

$$ا_۱ لا + ب_۱ ی = س_۱ \quad \text{اور} \quad ا_۲ لا + ب_۲ ی = س_۲$$

ان مساواتون سے یہہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{کہ}\quad لا = \frac{ب_۲ س_۱ - ب_۱ س_۲}{ا_۱ ب_۲ - ا_۲ ب_۱} \quad \text{اور}\quad ی = \frac{ا_۱ س_۲ - ا_۲ س_۱}{ا_۱ ب_۲ - ا_۲ ب_۱}$$

نسب نما مشترک $ا_۱ ب_۲ - ا_۲ ب_۱$ کو چار مقادیر $ا_۱$ $ب_۱$ $ا_۲$ $ب_۲$ کا مقطع کہتے ہین
اور اوسکو اس رمز سے تعبیر کرتے ہین کہ

لا اور ی کی قیمتوں کی شمار کنندوں کو یعنی $\begin{vmatrix} ا_1 & و & ب_1 \\ ا_2 & و & ب_2 \end{vmatrix}$ کو یہی مقطعات کہتی ہین اور لا اور ی کی قیمت کو اس طرح ظاہر کیا کرتے ہین کہ

$$\begin{vmatrix} ا_1 & و & ب_1 \\ ا_2 & و & ب_2 \end{vmatrix} لا = \begin{vmatrix} س_1 & و & ب_1 \\ س_2 & و & ب_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} ا_1 & و & ب_1 \\ ا_2 & و & ب_2 \end{vmatrix} ی = \begin{vmatrix} ا_1 & و & س_1 \\ ا_2 & و & س_2 \end{vmatrix}$$

(۳۱۷) ان مقطعات کو رتبہ دوم کا کہتی ہین کیونکہ ہر یک رقم اونکی دو مقداروں سی مرکب ہی اور مقادیر $ا_1$ و $ب_1$ اور $ا_2$ اور $ب_2$ کو جو مقطع $ا_1 ب_2 - ا_2 ب_1$ مین واقع ہوتی ہین اجزاء ذاتی کہتی ہین اور حاصل ضرب $ا_1 ب_2$ اور $ا_2 ب_1$ کو اجزاء ترکیبی مقطع کی کہتی ہین رتبہ دوم کی مقطع مین چار اجزاء ذاتی اور دو اجزاء ترکیبی ہوتی ہین

اس مقطع کے تعبیر کرنی کی واسطی جو رمز اوپر بیان ہوئی ہی اوسکی شکل مربع کی ہوتی ہین اور اوسمین دو صفین افقی ہوتی ہین یا دو صفین عمودی

(۳۱۸) اب رتبہ دوم کی مقطعات کی بعض صفات کا بیان کرتے ہین

چونکہ یہہ ہم کو حاصل ہے کہ

$$\begin{vmatrix} ا_1 & و & ب_1 \\ ا_2 & و & ب_2 \end{vmatrix} = ا_1 ب_2 - ا_2 ب_1 = \begin{vmatrix} ا_1 & و & ا_2 \\ ب_1 & و & ب_2 \end{vmatrix}$$

اسی یہہ نتیجہ نکلتا ہی کہ اگر افقی صفوں کو عمودی صفوں مین بدل دین تو کچھ فرق نہین اتا

(۳۱۹) ذیل کے متطابقی اسانی سی ثابت ہوتے ہین کہ

$$\begin{vmatrix} ا_1 & و & ب_1 \\ ا_2 & و & ب_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ب_1 & و & ا_1 \\ ب_2 & و & ا_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ا_2 & و & ب_2 \\ ا_1 & و & ب_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ب_2 & و & ا_2 \\ ب_1 & و & ا_1 \end{vmatrix}$$

پس مقطع مین اگر دو افقی صفین یا دو عمودی صفین اپسمین متبدل ہو جائین تو مقطع کی علامت بدل جاتی ہی مگر اوسکی قیمت مین کچھ خلل نہین واقع ہوتا اور اگر یہہ دونو تبادل

ہوں تو مقطع مین کچھہ ہی تبدل نہین واقع ہوتا

(۳۲۰) ہم کو معلوم ہے کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ع}\,\text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ع}\,\text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} = \text{ع}\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} \text{ع}\,\text{ا}_1 & \text{ع}\,\text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} = \text{ع}\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix}$$

پس اگر ایک افقی صف کی یا ایک عمودی صف کی ہر جزذاتی کو ایک مقدار معلوم مین ضرب دین تو مقطع کی ضرب اوس مقدار معلوم مین ہوجاتی ہے

(۳۲۱) ہم کو معلوم ہے کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ا}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ا}_2 \end{vmatrix} = 0$$

پس اگر دو افقی صفین اور عمودی صفین متطابقہ ہوں تو مقطع معدوم ہوجائیگا

(۳۲۲) مقطعات کی توضیح اور تشریح سے یہہ ثابت ہوسکتا ہے کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1+\text{اَ}_1 & \text{ب}_1+\text{بَ}_1 \\ \text{ا}_2+\text{اَ}_2 & \text{ب}_2+\text{بَ}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{اَ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{اَ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{بَ}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{بَ}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{اَ}_1 & \text{بَ}_1 \\ \text{اَ}_2 & \text{بَ}_2 \end{vmatrix}$$

پس وہ مقطع جسکا ہر ایک جزذاتی مجموعہ دو رقموں کا ہو مساوی اون چار مقطعات کی ہوتا ہی جو اس طرح سے بنتی ہین کہ بجای ہر کل سطر عمودی کی ہم اوسکی جزئیات عمودی سطروں کی لین اور یہہ ایک خاص صورت ہی کہ ہم فرض کرین $\text{اَ}_1 = \text{ب}_1$ اور $\text{اَ}_2 = \text{ب}_2$ تو بموجب دفعہ ۳۲۰ کے اوپر کے چار مقطعات مین سی دوسرا مقطع معدوم ہوجائیگا اور ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1+\text{ب}_1 & \text{ب}_1+\text{بَ}_1 \\ \text{ا}_2+\text{ب}_2 & \text{ب}_2+\text{بَ}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{بَ}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{بَ}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{بَ}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{بَ}_2 \end{vmatrix}$$

(۳۲۳) بموجب دفعہ ۳۲۲ کے

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_{۱}\text{سہ}_{۱} + \text{ب}_{۱}\text{صہ}_{۱} & \text{ا}_{۱}\text{سہ}_{۲} + \text{ب}_{۱}\text{صہ}_{۲} \\ \text{ا}_{۲}\text{سہ}_{۱} + \text{ب}_{۲}\text{صہ}_{۱} & \text{ا}_{۲}\text{سہ}_{۲} + \text{ب}_{۲}\text{صہ}_{۲} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{ا}_{۱}\text{سہ}_{۱} & \text{ا}_{۱}\text{سہ}_{۲} \\ \text{ا}_{۲}\text{سہ}_{۱} & \text{ا}_{۲}\text{سہ}_{۲} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ب}_{۱}\text{صہ}_{۱} & \text{ب}_{۱}\text{صہ}_{۲} \\ \text{ب}_{۲}\text{صہ}_{۱} & \text{ب}_{۲}\text{صہ}_{۲} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ا}_{۱}\text{سہ}_{۱} & \text{ب}_{۱}\text{صہ}_{۲} \\ \text{ا}_{۲}\text{سہ}_{۱} & \text{ب}_{۲}\text{صہ}_{۲} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ب}_{۱}\text{صہ}_{۱} & \text{ا}_{۱}\text{سہ}_{۲} \\ \text{ب}_{۲}\text{صہ}_{۱} & \text{ا}_{۲}\text{سہ}_{۲} \end{vmatrix}$$

$$= \text{سہ}_{۱}\text{سہ}_{۲}\begin{vmatrix} \text{ا}_{۱} & \text{ا}_{۱} \\ \text{ا}_{۲} & \text{ا}_{۲} \end{vmatrix} + \text{صہ}_{۱}\text{صہ}_{۲}\begin{vmatrix} \text{ب}_{۱} & \text{ب}_{۱} \\ \text{ب}_{۲} & \text{ب}_{۲} \end{vmatrix} + \text{سہ}_{۱}\text{صہ}_{۲}\begin{vmatrix} \text{ا}_{۱} & \text{ب}_{۱} \\ \text{ا}_{۲} & \text{ب}_{۲} \end{vmatrix} + \text{صہ}_{۱}\text{سہ}_{۲}\begin{vmatrix} \text{ب}_{۱} & \text{ا}_{۱} \\ \text{ب}_{۲} & \text{ا}_{۲} \end{vmatrix}$$

بموجب دفعہ ۳۳۰ کے اور بموجب دفعہ ۳۳۱ کے چار مقطعات میں اول دو مقطعات معدوم ہوتی ہیں
اور بموجب دفعہ ۳۱۸ کے

$$\begin{vmatrix} \text{ب}_{۱} & \text{ا}_{۱} \\ \text{ب}_{۲} & \text{ا}_{۲} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{ا}_{۱} & \text{ب}_{۱} \\ \text{ا}_{۲} & \text{ب}_{۲} \end{vmatrix}$$

پس ہم نے یہہ پہونچا ہے کہ

$$(\text{سہ}_{۱}\text{صہ}_{۲} - \text{صہ}_{۱}\text{سہ}_{۲})\begin{vmatrix} \text{ا}_{۱} & \text{ب}_{۱} \\ \text{ا}_{۲} & \text{ب}_{۲} \end{vmatrix} \quad \text{یعنی} \quad \begin{vmatrix} \text{سہ}_{۱} & \text{صہ}_{۱} \\ \text{سہ}_{۲} & \text{صہ}_{۲} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \text{ا}_{۱} & \text{ب}_{۱} \\ \text{ا}_{۲} & \text{ب}_{۲} \end{vmatrix}$$

اسواسطے

$$\begin{vmatrix} \text{سہ}_{۱} & \text{صہ}_{۱} \\ \text{سہ}_{۲} & \text{صہ}_{۲} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \text{ا}_{۱} & \text{ب}_{۱} \\ \text{ا}_{۲} & \text{ب}_{۲} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا}_{۱}\text{سہ}_{۱} + \text{ب}_{۱}\text{صہ}_{۱} & \text{ا}_{۱}\text{سہ}_{۲} + \text{ب}_{۱}\text{صہ}_{۲} \\ \text{ا}_{۲}\text{سہ}_{۱} + \text{ب}_{۲}\text{صہ}_{۱} & \text{ا}_{۲}\text{سہ}_{۲} + \text{ب}_{۲}\text{صہ}_{۲} \end{vmatrix}$$

پس حاصل ضرب دوسرے رتبہ کے دو مقطعات کا ایک مقطع دوسرے رتبہ کا ہے
اور یہہ ایک خاص صورت ہی کہ اجزا ذاتی سہ۱ و صہ۱ و سہ۲ و صہ۲ جدا گانہ برابر
ا۱ و ب۱ و ا۲ و ب۲ کے ہوں تو یہہ مربع مقطع کا

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_{۱} & \text{ب}_{۱} \\ \text{ا}_{۲} & \text{ب}_{۲} \end{vmatrix}$$

برابر اس مقطع کے ہے کہ

۱۰	$ا_۱^۲ + ب_۱^۲ \quad و \quad ا_۱ ا_۲ + ب_۱ ب_۲$ $ا_۱ ا_۲ + ب_۱ ب_۲ \quad و \quad ا_۲^۲ + ب_۲^۲$

(۳۲۴) اب ہم تیسری رتبہ کی مقطعات کا بیان کرتی ہین ان ہمزاد مساواتون پر غور کرو کہ

$ا_۱ لا + ب_۱ ی + س_۱ ی = د_۱$ و $ا_۲ لا + ب_۲ ی + س_۲ ی = د_۲$ اور $ا_۳ لا + ب_۳ ی + س_۳ ی = د_۳$

ان مساواتون سی یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$لا = \frac{د_۱(ب_۲ س_۳ - ب_۳ س_۲) + د_۲(ب_۳ س_۱ - ب_۱ س_۳) + د_۳(ب_۱ س_۲ - ب_۲ س_۱)}{ا_۱(ب_۲ س_۳ - ب_۳ س_۲) + ا_۲(ب_۳ س_۱ - ب_۱ س_۳) + ا_۳(ب_۱ س_۲ - ب_۲ س_۱)}$$

اور اسی قبیل کے جملی ی اور ی کے قیمتون کے واسطی ہونگے

لا کی قیمت کی نسب نما کو تیسری رتبہ کا مقطع کہتی ہین اور اوسکی نو اجزا ر ذاتی

$ا_۱$ و $ب_۱$ و $س_۱$ اور $ا_۲$ و $ب_۲$ و $س_۲$ و $ا_۳$ و $ب_۳$ و $س_۳$ ہین اور اوسمین چھہ اجزا ترکیبی ہین اونمین سی ہر یک تین اجزا ر ذاتی کا حاصل ضرب ہی اور اس مقطع کو اس رمز سے تعبیر کرتے ہین

$$\begin{vmatrix} ا_۱ & ب_۱ & س_۱ \\ ا_۲ & ب_۲ & س_۲ \\ ا_۳ & ب_۳ & س_۳ \end{vmatrix}$$

چونکہ قیمت اس مقطع کے یہہ ہے کہ

$$ا_۱(ب_۲ س_۳ - ب_۳ س_۲) + ا_۲(ب_۳ س_۱ - ب_۱ س_۳) + ا_۳(ب_۱ س_۲ - ب_۲ س_۱)$$

اب اسکو ہم دوسری رتبہ کے مقطعات مین اسطرح بیان کرتے ہین کہ

$$ا_۱ \begin{vmatrix} ب_۲ & س_۲ \\ ب_۳ & س_۳ \end{vmatrix} + ا_۲ \begin{vmatrix} ب_۳ & س_۳ \\ ب_۱ & س_۱ \end{vmatrix} + ا_۳ \begin{vmatrix} ب_۱ & س_۱ \\ ب_۲ & س_۲ \end{vmatrix}$$

لا کی قیمت کا شمار کنندہ بھی تیسری رتبہ کا مقطع ہی فقط $ا_۱$ و $ا_۲$ و $ا_۳$ کو $د_۱$ و $د_۲$ و $د_۳$ سے

جداگانہ نسبتوں کی رموزی جملون مین تبدیل کرلین تو شمار کنندہ کی رموزی جملی حاصل ہوجائیگے

اب ہم کو یہہ ظاہر معلوم ہوتا ہی کہ جو صفت اور خاصیت دوسرے رتبہ کی مقطعات کی تھی وہی ان تیسرے رتبہ کی مقطعات کی صفت اور خاصیت ہے

(۳۲۵) فرض کرو کہ $\text{ا}_1 = 1$ اور $\text{ا}_2 = 0$ اور $\text{ا}_3 = 0$ تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{ب}_1 & \text{س}_1 \\ 0 & \text{ب}_2 & \text{س}_2 \\ 0 & \text{ب}_3 & \text{س}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ب}_2 & \text{س}_2 \\ \text{ب}_3 & \text{س}_3 \end{vmatrix}$$

پس اسطرح تیسرے رتبہ کی مقطع کی تحویل دوسرے رتبہ کے مقطع کی طرف ہوگی اور ب_1 اور س_1 کے قیمتین کچھ اس مقطع پر اثر نہین رکھتین اور اگر ہم چاہین تو اونکو برابر صفر کے لکھہ سکتی ہین

اسی معلوم ہوا کہ اگر کوئی ہم کو ارتباط تیسری رتبہ کے مقطعات مین معلوم ہو تو اوسی مثل اوس ارتباط کے دوسری رتبہ کی مقطعات مین ایک ارتباط اسطرح استباط کرسکتی ہین کہ بعض اجزا ذاتی کو معدوم خیال کرین

(۳۲۶) مقطعات کی تشریح اور توضیح سے یہہ ثابت ہوسکتا ہے کہ

$$\text{ا}_1 \begin{vmatrix} \text{ب}_2 & \text{س}_2 \\ \text{ب}_3 & \text{س}_3 \end{vmatrix} + \text{ا}_2 \begin{vmatrix} \text{ب}_3 & \text{س}_3 \\ \text{ب}_1 & \text{س}_1 \end{vmatrix} + \text{ا}_3 \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{س}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{س}_2 \end{vmatrix}$$

$$= \text{ا}_1 \begin{vmatrix} \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{س}_2 & \text{س}_3 \end{vmatrix} + \text{ب}_1 \begin{vmatrix} \text{س}_2 & \text{س}_3 \\ \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \end{vmatrix} + \text{س}_1 \begin{vmatrix} \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \end{vmatrix}$$

یعنی

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{س}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{س}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{س}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{س}_1 & \text{س}_2 & \text{س}_3 \end{vmatrix}$$

اسی ثابت ہوا کہ اگر افقی صف اور عمودی صف آپس میں تبدیل ہو جاسکی تو مقطع میں کچہ فرق نہیں آتا

(۳۲۷) ذیل کی مطابقی آسانی سی اسطرح ثابت ہوسکتی ہیں کہ تیسرے رتبہ کی مقطعات کو دوسرے رتبہ کے مقطعات میں تحویل کرلیں اور پہر اونکی توضیح کریں

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & س_1 \\ ا_2 & ب_2 & س_2 \\ ا_3 & ب_3 & س_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ب_1 & ا_1 & س_1 \\ ب_2 & ا_2 & س_2 \\ ب_3 & ا_3 & س_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ب_1 & س_1 & ا_1 \\ ب_2 & س_2 & ا_2 \\ ب_3 & س_3 & ا_3 \end{vmatrix}$$

پس اگر دو عمودی صفون میں تبادل ہو تو علامت مقطع کی بدل جاتی ہی مگر اوسکی قیمت نہیں بدلتی اور اسہواسطی اگر یہہ عمل دو دفعہ کیا جاے تو مقطع میں کچہ تبدل نہیں ہوتا اسی معلوم ہوا کہ موافق دفعہ ۳۲۶ کے اگر دو افقی صفین باہم متبدل ہوئی تو مقطع کی علامت بدل جائیگی مگر اوسکی قیمت میں کچہ فرق نہیں لگیا اور اگر یہہ عمل دو دفعہ کیا جاے تو مقطع میں کچہ تبدل نہیں واقع ہوگا

اسی یہہ بہی نتیجہ نکلتا ہی کہ اگر دو عمودی صفون میں بہی تبادل ہو اور دو افقی صفون میں بہی تبادل ہو تو مقطع میں کچہ تبدل نہیں ہوگا پس

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & س_1 \\ ا_2 & ب_2 & س_2 \\ ا_3 & ب_3 & س_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ب_2 & ا_2 & س_2 \\ ب_1 & ا_1 & س_1 \\ ب_3 & ا_3 & س_3 \end{vmatrix}$$

(۳۲۸) دفعہ ۳۲۰ کی طرح ثابت کرسکتی ہیں کہ اگر ایک افقی صف میں یا عمودی صف میں جزو ذاتی کو کسی معلوم مقدار میں ضرب دیں تو مقطع کی ضرب اوس مقدار معلوم میں ہوجائینگی

(۳۲۹) اسکا ثابت کرنا آسان ہے کہ

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & س_1 \\ ا_2 & ب_2 & س_2 \\ ا_3 & ب_3 & س_3 \end{vmatrix} = ۰ \text{ اور } \begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & س_1 \\ ا_2 & ب_2 & س_2 \\ ا_2 & ب_2 & س_2 \end{vmatrix} = ۰$$

پس اگر دو صفیں افقی یا دو صفیں عمودی متطابق ہوں تو مقطع فنا ہو جایگا

(۳۳۰) اس بات کا ثابت کرنا آسان ہے کہ مقطع

| ا۱ + اَ۱ + اً۱ و ب۱ و س۱ |
| ا۲ + اَ۲ + اً۲ و ب۲ و س۲ |
| ا۳ + اَ۳ + اً۳ و ب۳ و س۳ |

برابر ان تین مقطعات کے مجموعہ کے

ا۱ و ب۱ و س۱	و	اَ۱ و ب۱ و س۱	و	اً۱ و ب۱ و س۱
ا۲ و ب۲ و س۲		اَ۲ و ب۲ و س۲		اً۲ و ب۲ و س۲
ا۳ و ب۳ و س۳		اَ۳ و ب۳ و س۳		اً۳ و ب۳ و س۳

اور اسی کی مشتابہ نتیجہ حاصل ہوگا اگر اول عمودی صف میں ہر جز ذاتی مجموعہ چار رقموں کا یا مجموعہ پانچ رقموں کا اور علی ہذا القیاس ہوتا — اگر اجزاء ذاتی ب۱ و ب۲ و ب۳ میں ہر ایک کی جگہ تین رقمیں رکھی جائیں تو تین مقطعات بالا میں سے ہر ایک برابر تین مقطعات کے مجموعہ کے ہوگا اور علی ہذا القیاس

اسطرح سے مقطع ذیل برابر ۲۷ مقطعات کے مجموعہ کے ہو سکتا ہے

| ا۱ + اَ۱ + اً۱ و ب۱ + بَ۱ + بً۱ و س۱ + سَ۱ + سً۱ |
| ا۲ + اَ۲ + اً۲ و ب۲ + بَ۲ + بً۲ و س۲ + سَ۲ + سً۲ |
| ا۳ + اَ۳ + اً۳ و ب۳ + بَ۳ + بً۳ و س۳ + سَ۳ + سً۳ |

۲۷ مقطعات اسطرح سے اسکی بنتی ہیں کہ بجای کل عمودی صف کی لیتی کی عمودی صفوں کے جزئیات میں سے ایک جز لیتا ہیں پس ان مقطعات میں سے تین وہ مقطعات ہونگے جو اوپر لکھی ہیں

(۳۳۱) دفعہ ۳۳۰ کے خاص صورت کے لئی ذیل کا مقطع لیتے ہیں کہ

ا۱ سہ۱ + ب۱ صہ۱ + س۱ لہ۱	ا۱ سہ۲ + ب۱ صہ۲ + س۱ لہ۲	ا۱ سہ۳ + ب۱ صہ۳ + س۱ لہ۳
ا۲ سہ۱ + ب۲ صہ۱ + س۲ لہ۱	ا۲ سہ۲ + ب۲ صہ۲ + س۲ لہ۲	ا۲ سہ۳ + ب۲ صہ۳ + س۲ لہ۳
ا۳ سہ۱ + ب۳ صہ۱ + س۳ لہ۱	ا۳ سہ۲ + ب۳ صہ۲ + س۳ لہ۲	ا۳ سہ۳ + ب۳ صہ۳ + س۳ لہ۳

یہہ دریافت ہوتا ہی کہ ۲۷ مقطعات ہیں جنکا مجموعہ یہہ خیال کرسکتی تمام سوا ۶ کی بموجب دفعات ۳۲۸ اور ۳۲۹ کے معدوم ہو جاتی ہیں تمثیلاً ۲۷ مقطعات میں سی ایک یہہ لو کہ

ا۱ سہ۱	ا۱ سہ۲	ب۱ صہ۳
ا۲ سہ۱	ا۲ سہ۲	ب۲ صہ۳
ا۳ سہ۱	ا۳ سہ۲	ب۳ صہ۳

یعنی سہ۱ سہ۲ صہ۳

ا۱	ا۱	ب۱
ا۲	ا۲	ب۲
ا۳	ا۳	ب۳

بموجب دفعہ ۳۲۸ کے اور یہہ مقطع بموجب دفعہ ۳۲۹ معدوم ہوتا ہی اور چھہ مقطعات باقی رہتی ہیں اونمیں سے ایک یہہ ہے کہ

ا۱ سہ۱	ب۱ صہ۲	س۱ لہ۳
ا۲ سہ۱	ب۲ صہ۲	س۲ لہ۳
ا۳ سہ۱	ب۳ صہ۲	س۳ لہ۳

یعنی سہ۱ صہ۲ لہ۳

ا۱	ب۱	س۱
ا۲	ب۲	س۲
ا۳	ب۳	س۳

ایک اور باقی ماندہ چھہ مقطعات میں سے لو تو

ا۱ سہ۱	س۱ لہ۲	ب۱ صہ۳
ا۲ سہ۱	س۲ لہ۲	ب۲ صہ۳
ا۳ سہ۱	س۳ لہ۲	ب۳ صہ۳

یعنی سہ۱ لہ۲ صہ۳

ا۱	س۱	ب۱
ا۲	س۲	ب۲
ا۳	س۳	ب۳

یعنی − سہ۱ لہ۲ صہ۳

ا۱	ب۱	س۱
ا۲	ب۲	س۲
ا۳	ب۳	س۳

بموجب دفعہ ۳۲۷ کے

اسکا نتیجہ یہہ ہی کہ جو چھہ مقطعات باقی رہتی ہیں اونسی یہہ بنتا ہے کہ

[سه١ (صه٢ لر٣ − صه٣ لر٢) + سه٢ (صه٣ لر١ − صه١ لر٣) + سه٣ (صه١ لر٢ − صه٢ لر١)] | ا١ و ب١ و س١
 ا٢ و ب٢ و س٢
 ا٣ و ب٣ و س٣ |

یعنی | سه١ و صه١ و لر١
 سه٢ و صه٢ و لر٢
 سه٣ و صه٣ و لر٣ | × | ا١ و ب١ و س١
 ا٢ و ب٢ و س٢
 ا٣ و ب٣ و س٣ |

اسی معلوم ہوتا ہی کہ حاصل ضرب تیسری رتبہ کی دو مقطعات کا تیسری رتبہ کے مقطع مین نمایان ہو سکتا ہی اگر ہم ا١ و ب١ ۰۰۰ جداگانہ برابر سه١ و صه١ ۰۰۰ کے فرض کرین تو ہم تیسری رتبہ کا مقطع حاصل کرینگے اور یہہ مساوی تیسری رتبہ کے مقطع کے مجذور کے ہوگا

(٣٣٢) ہم نی اسقدر مثالین مقطعات کی ذات اور صفات کی لکہ دین ہین کہ طالب علم کی سمجہہ مین بخوبی یہہ بات اجائیگی کہ یہہ مضمون کیا ہی ہم صرف رتبہ سوم کی مقطعات پر مطلب کو چہوڑتے ہین اس سبب سے کہ جو خواص مقطعات رتبہ سوم کی ثابت ہوچکے ہین اسی موافق دفعہ ٣٢٥ کے رتبہ دوم کے مقطعات کی خواص استخراج ہو سکتی تہی مگر جس طرح سی ہم نی اس مضمون کو بیان کیا ہی اسیطرح مبتدیون کے واسطے سودمند ہی باب ائندہ مین ہم اثبات علی العموم لکہینگے خواہ مقطعات کسی رتبہ کے ہون اس بات پر غور کرو کہ ہم نی اس مقطعات کی مطلب کی تمہید ہمزاد مساواتون کو حل سے لکہی ہے اس تمہید سی طالب علم ایک ہی دفعہ مین سمجہہ سکتا کہ اسی جملی جنکا نام مقطعات رکہا ہے ریاضیات مین واقع ہوتی ہین جب ہم مسئلہ عامہ لکہینگے تو وہان مقطعات کے تغیرات بالکل مساوات سی بی لگاؤ لکہینگے اور اوسی اس مسئلہ عامہ کے بیان کرنی مین اسانی ہوتی ہے اگر ہم تیسرے رتبہ کے مقطع کو ان معنی جدید کے موافق بیان کرین تو طالب علم اوس تعریف مقطعات کو جو باب ائندہ مین بیان ہوگی خوب سمجہے گا

(٣٣٣) قیمت مقطع

| ا١ و ب١ و س١
 ا٢ و ب٢ و س٢
 ا٣ و ب٣ و س٣ |

ا۱ ب۲ س۳ - ا۱ ب۳ س۲ + ا۲ ب۳ س۱ - ا۲ ب۱ س۳ + ا۳ ب۱ س۲ - ا۳ ب۲ س۱

ہی اول جز ترکیبی ا۱ ب۲ س۳ ہی اور یہہ حاصل ضرب اون اجزاء ذاتی کا ہی جو اوس رمز کے مربع مین
کہ مقطع کو تعبیر کرتا ہی قطر مین لکہی ہوئی ہین اور اب باقی اور اجزاء ترکیبی اول جز ترکیبی سے
موافق طریقہ ذیل کی استخراج ہو سکتی ہین کہ اعداد زیرین ۱ و ۲ و ۳
حروف ا و ب و س کی نیچے اوتنی مختلف طورون سی لگائی گئی ہین جتنی طورنسی ترتیبین ان اعداد
زیرین کی ہو سکتی ہین اور علامت + یا - کی کسی جز ترکیبی کے اول اسطرح لگ سکتی ہے
کہ یہہ دیکہیں کہ یہہ جز ترکیبی اول جز ترکیبی سی کسطرح مستنبط ہوا ہی اگر جفت دفعہ تبدلات دو
اعداد زیرین کا ہوا ہی تو + کی علامت لکہو اور اگر طاق دفعہ تبدلات ہوئی ہین تو - کی علامت مقرر کرو
مثلاً دوسرا اجز ترکیبی او پر ا۱ ب۳ س۲ ہی اور وہ اول جز ترکیبی سی اسطرح استخراج ہوا ہے
اعداد زیرین ۲ اور ۳ مین تبادل ہوا ہی اسلئی بموجب قاعدہ کے علامت - کی اول لگائی جاے
اور یہہ جز ترکیبی ا۲ ب۳ س۱ ہی اور وہ دوسرے جز ترکیبی سی اسطرح حاصل ہوتا ہے کہ
اعداد زیرین ۲ اور ۱ مین تبادل ہوا ہی اور اسواسطے وہ اول جز ضربی سی دو اعداد زیرین کے
دو تبادل سی مستنبط ہوتا ہی اسواسطے بموجب قاعدہ کی علامت + کی اول لگائی جائی اور اسیطرح
اور باقی اجزاء ترکیبی کی مناسب علامات کا فیصلہ ہو سکتا ہے

(۴۳۳) تیسرے رتبہ کے مقطعات کے یہہ خاص صورتین امثلہ ذیل ہین جنکو طالب علم ثابت کر سکتا ہے

(۱)
| ا و ھ و گ |
| ھ و ب و ف |
| گ و ف و س |
= ا ب س - ا ف۲ - ب گ۲ - س ھ۲ + ۲ ف گ ھ

(۲)
| ا و لا۱ و ک۱ |
| ا و لا۲ و ک۲ |
| ا و لا۳ و ک۳ |
= لا۱ ک۲ - لا۲ ک۱ - لا۱ ک۳ - لا۳ ک۲ + لا۳ ک۱ - لا۱ ک۳

(۳)
$$\begin{vmatrix} ۱ ، & ا_1+ا_2 ، & ا_1ا_2 \\ ۱ ، & ب_1+ب_2 ، & ب_1ب_2 \\ ۱ ، & س_1+س_2 ، & س_1س_2 \end{vmatrix} = (ا_1-ب_2)(ب_1-س_2)(س_1-ا_2)+(ا_2-ب_1)(ب_2-س_1)(س_2-ا_1)$$

(۴)
$$\begin{vmatrix} ۱ ، & لر ، & -صہ \\ -لر ، & ۱ ، & سہ \\ صہ ، & -سہ ، & ۱ \end{vmatrix} = ۱ + سہ^2 + صہ^2 + لر^2$$

چھبیسواں باب خواص مقطعات

(۳۳۵) فرض کرو کہ رموز $ا_1$ و $ا_2$ ۔۔۔۔ ان میں تو اوس ایک رمز کو بہ نسبت دوسرے رمز کے اعلی کہینگے جسمین کہ عدد زیرین بڑا بہ نسبت دوسرے عدد زیرین کے ہو مثلاً $ا_3$ کو اعلی بہ نسبت $ا_2$ یا $ا_1$ کے کہینگے یا $ا_4$ کو اعلی بہ نسبت $ا_3$ و $ا_2$ و $ا_1$ کے کہینگے اور علی ہذا القیاس

اب فرض کرو کہ ان رموز کی ترتیبیں بنائی گئیں تو جس ترتیب میں دو رمزوں کی اعداد زیرین علیٰ اول بڑا بہ نسبت دوسرے کی ہو تو اوسی بی ترتیبی یا انتشار کہتی ہیں مثلاً ترتیب $ا_3 ا_4 ا_2 ا_1$ میں چار بی ترتیبیاں ہیں یعنی $ا_3 ا_1$ و $ا_4 ا_3$ و $ا_4 ا_1$ اور $ا_3 ا_1$

(۳۳۶) رموز $ا_1$ و $ا_2$ ۔۔ ان میں دو نوع کی ترتیبیں ہوسکتی ہیں ایک وہ جنمیں جفت تعداد بی ترتیبوں کی ہو دوسرے وہ جنمیں طاق تعداد بی ترتیبوں کی ہو

(۳۳۷) جب کسی ترتیب میں دو رمزوں میں تبادل اسطرح ہو کہ ایک دوسرے سے مقام بدل لے اور باقی رموز میں کچھ تبدل نہ ہو تو تعداد بی ترتیبوں کی جو زیادہ یا کم ہوگی وہ طاق ہوگی

فرض کرو کہ گ و ک دو رموز ہیں جنمیں ک اعلی ہے اور گ سی پیشتر جماعت رموز کو ا تعبیر کرتا ہے اور گ اور ک کی درمیان جو جماعت رموز ہو اوسکو ب تعبیر کرتا ہے اور گ اور ک کے مابعد جو جماعت رموز ہو اوسکو س تعبیر کرتا ہے تو جن ترتیبوں کا باہم مقابلہ کرنا ہے وہ اگ ب ک س اور اک ب گ س ہیں تو بی ترتیبوں کی تعداد کا فرق موقوف اون رموز

پہر جنسی کہ جماعتین گہ ب ک اور ک ب گہ بنتی ہین فرض کرو کہ ب مین صہ رموز داخل ہین
اور اونمین سی صہ۱ اعلی بہ نسبت گہ کے ہیں اور صہ۲ اونمین سی اعلی بہ نسبت ک کے ہے
تو جماعت گہ ب ک مین علاوہ اون بی ترتیبوں کی جو خود ب مین موجود ہین صہ - صہ۱ + صہ۲
بی ترتیبیان اور ہین اسواسطی کہ گہ اعلی صہ - صہ۱ سی ب کے رموز مین ہی
اور صہ۲ رموز ب مین اعلی بہ نسبت ک کی ہین جماعت ک ب گہ مین سوا اون بی ترتیبوں کے
جو خود ب مین ہین صہ - صہ۲ + صہ۱ + ۱ بی ترتیبیات ہین اسواسطی کہ ک اعلی بہ نسبت
صہ - صہ۲ رموز سی ب کی اندر ہی اور صہ۱ رموز ب مین اعلی بہ نسبت گہ کی ہین اور
ک اعلی بہ نسبت گہ کی ہی اسواسطی تفاوت بی ترتیبوں کی تعداد مین

صہ - صہ۲ + صہ۱ + ۱ - (صہ - صہ۱ + صہ۲)

یعنی ۲ (صہ۱ - صہ۲) + ۱ ہیہ تفاوت طاق عدد ہی

(۳۳۸) ایک ترتیب معلوم سی تمام ترتیبین جو کل ن رموز کی بنائی جاتی دو رمزوں کی تبادل
کی تکرار سی مستنبط ہو سکتی ہین اس طریقہ سی جو استخراج ترتیبوں کا کرینگی تو موافق دفعہ
۳۳۷ کی باری باری ایسی ترتیبین حاصل ہونگین جنمین ایک دفعہ جفت بی ترتیبیان ہونگین اور
دوسری دفعہ طاق بی ترتیبیات ہونگین اور تمام رموز کی ترتیبوں کی کل تعداد جفت ہوگی
اسی سیہ معلوم ہوتا ہی کہ ترتیبین جنمین بی ترتیبوں کی تعداد جفت ہو اتنی ہی ہوتی ہے
جتنی کہ وہ ترتیبین ہوتی ہین کہ جنمین بی ترتیبوں کی طاق تعداد ہو

(۳۳۹) فرض کرو کہ ق۲ مقادیر مربع کی صورت مین اسطرح لکھی جائین

ا۱و۱	و ا۱و۲	و ا۱و۳	. .	ا۱و ن
ا۲و۱	و ا۲و۲	و ا۲و۳	. .	ا۲و ن
. .	. .	. .	. .	. .
ان و۱	و ان و۲	و ان و۳	.	ان و ن

یہان کسی مقدار اردی مین عدد زیرین رسی تو افقی صف اور دوسرے عدد زیرین
کسی عمودی صف جسمین اردی نمایان ہو تعبیر ہوتی ہے

رمز بالاسی مقطع ن^۲ مقادیر کا جو اوسمین واقع ہوتی ہین تعبیر ہوتا ہی اور ان مقادیر کو اجزای ذاتی اوس مقطع کا کہتی ہین اور قیمت مقطع کی اسطرح دریافت ہوتی ہی کہ خاص تعداد اجزای ترکیبی کا مجموعہ لین اور ہر جز ترکیبی مین ن اجزای ذاتی ہین اول جز ترکیبی حاصل ضرب اجزای ذاتی $ا_{1,1}$ و $د_{2,2}$ و $د_{3,3}$ ... $د_{ن,ن}$ کا ہے اور یہہ مربع مذکور کے اوس قطر مین واقع ہین جو دائین طرف اوپر کی کونہ سی شروع ہوتا ہی اور اپنی مقابل کی کونہ پر ختم ہوتا ہے ہم اس قطر کو قطر مربع کہینگے اسواسطی کہ اینده ہمکو موقع اس قطر کی طرف رجوع کرنی کا ملے گا اور تمام اور اجزای ترکیبی اول جز ترکیبی $ا_{1,1}$ و $د_{2,2}$ و $د_{3,3}$ ... $د_{ن,ن}$ سی اسطرح حاصل ہوتی ہین کہ دوسرے عدد زیرین کی ترتیبین لیتی ہین اور پہلی عدد زیرین جیسا ہی ویسا ہی رہتی دیتی ہین اور علامت + اور − کی اول مقطع کی ہر جز ترکیبی کے اول موافق نوع کے مقرر کرتے ہین جسکا بیان دفعہ ۲۳۳ مین ہوا اگر وہ اوسی نوع کی ہین جس نوع کا اول جز ترکیبی ہی تو علامت + کی اول لگاتی ہین اور اگر وہ اس نوع کا نہین ہوتا تو علامت − کی

(۲۴۰) اوپر کے مقطع کو ن رتبی کا کہتے ہین کیونکہ ہر جز ترکیبی ن اجزای ذاتی کا حاصل ضرب ہوتا ہے اور تعداد اجزای ترکیبی کے اوتنی ہی ہوتے ہی جتنی کہ تعداد ن اشیا کی ترتیبون کی ہوتی ہے جب ترتیب کل اشیا کی ایک ہی دفعہ کی جائین یعنی لن انمین سی نصف کی اول علامت + ہوگی اور نصف کی اول علامت − کی یہہ بھی معلوم ہوتا ہی کہ اجزای ترکیبی کا جسطرح بنائی جاتے ہین اونمین سی ہر یک جز ترکیبی مین صرف ایک ہی جز ذاتی اوس رمز کی ہر صف افقی کا یا ہر صف عمودی کا ہوتا ہے جو اوس مقطع کو تعبیر کرتی ہے

(۲۴۱) مقطع کی واسطی بجای رمز بالا کے بعض اوقات یہہ رمز
مج ± $ا_{1,1}$ و $د_{2,2}$ و $د_{3,3}$ ... $د_{ن,ن}$ کام مین لاتے ہین یعنی جز ترکیبی اول

کو لکھتی ہین اور اوسکی اول زمرجح ± کو لکھہ دیتی ہین اور اوسی تعبیر ہوتا ہی مجموعہ اجزا ترکیبی کا جو اول جز ترکیبی سی مناسب ترتیبوں اور علامات + اور - کی ٹھیک ٹھیک مقرر کرنی حاصل ہوتا ہے
مقطع کی اجزا ترکیبی مختلف طور سی تعبیر ہوتی ہین کبھی تو (ے و ک) کو بجاے (ا ے و ک) کے کام مین لاتی ہین اور اس صورت مین یہہ یاد رکھنا چاہیئی
کہ (ے و ک) اور (ک و ے) جدا جدا مقادیر تعبیر ہوتی ہین ادنی رتبی کے مقطعات کی مثالون مین اسمین آسانی ہوتی ہی کہ دوسری اعداد زیرین کام مین نہ لائین اور ایک ہی حرف تمام اجزا ذاتی کے واسطے جو ایک عمودی صف مین ہو کام مین لائین اور ایک ہی اعداد زیرین سی اونمین تمیز پیدا کرین یہی طریقہ کتابت پہلی باب مین اختیار کیا گیا ہے

(۳۴۲) اور اجزا ترکیبی مقطع کی اول جز ترکیبی سی اسطرح استخراج ہوتی ہین کہ دوسری عدد زیرین کے ترتیبین لیتی ہین اور اول عدد زیرین مین کچہ تبدل نہین کرتے اور یہہ اجزای ترکیبی ایک اور طرح سی حاصل ہوتی ہین کہ اول اعداد زیرین کی ترتیبین لین اور دوسرے اعداد زیرین مین تبدل نہ کرین اسواسطی کہ فرض کرو کہ

سہ و صہ و لہ . . . ہر ایک خاص ترتیبین ن اعداد ا و ۲ و ۳ . . . ن

کی تعبیر کرین تو ا۱ و سہ و ا۲ و صہ و ا۳ و لہ . . . ان و ک ایک جز و ترکیبی ہی جو اسطرح پیدا ہوتا ہے کہ اول جز ترکیبی مین دوسری عدد زیرین ۱ و ۲ . . . ن کو

سہ و صہ و لہ . . . سے بدل دین لیکن یہی جز ترکیبی اول جز ترکیبی

ا۱ و ا۲ و ا۳ . . . ان و ن سے بھی اسطرح استخراج ہو سکتا ہے کہ دوسری اعداد زیرین مین کچہ تبدل نہ کرین اور اول اعداد زیرین کو مناسب طور پر تبدیل کرین یعنی ا کو سہ سی اور ۲ کو صہ سے اور ۳ کو لہ سے . . . اور ن کو ہو سے ان دونو طریقون سے جو استخراج ہوتا ہے اونمین دونو اعداد زیرین کے تبادل کی تعداد ایک ہی ہوتی ہی اور اسیواسطی ایک ہی علامت جز و ترکیبی کے اول بموجب قاعدہ

دفعہ ۳۳۹ کے　　مقرر ہوتی ہے

(۳۴۳) اگر متواتر افقی صفون کو عمود صفون سی بدل دین تو مقطع کی قیمت مین کچھ فرق نہین پڑتا

ا۱و۱	ا۱و۲	...	ا۱و ن
ا۲و۱	ا۲و۲	...	ا۲و ن
.	.		.
ان و۱	ان و۲	...	ان و ن

=

ا۱و۱	ا۲و۱	...	ان و۱
ا۱و۲	ا۲و۲	...	ان و۲
.	.		.
ا۱و ن	ا۲و ن	...	ان و ن

اسواسطے کہ یہہ ظاہر ہی موافق دفعہ ۳۴۰ کے اجزاء ترکیبی مقطعات کی برابر قیمت کی ہوتے ہین
اور دفعہ ۳۴۲ کے موافق اونکی ایک ہی علامتین ہوتی ہین

(۳۴۴) اگر دو افقی صفین یا دو عمودی صفین آپسمین بدل جائین تو علامت مقطع کی تبدیل ہو جائیگی
غرض کرو کہ س مقطع معلوم کو تعبیر کرتا ہی اور ـَ س اوس مقطع کو جو تبادل سے پیدا ہوتا ہے
تو اجزاء ترکیبی س اور ـَ س مین ایکسا ہی قیمت کی ہین اب صرف اونکی علامت ہی کا فیصلہ
کرنا ہی ـَ س مین اول جزء ترکیبی س کی اول جزو ترکیبی سی اسطرح استخراج ہو سکتا ہے
کہ دوسری اعداد زیرین مین سی دو کا تبادل کر دین اور ان اجزاء ترکیبی کی دونو مقطعات
مین مختلف علامتین ہونگین تو ایک جزء ترکیبی ـَ س مین جو ـَ س کی اول جز ترکیبی کے م تبادل سے
دوسرے اعداد زیرین کی پیدا ہوتا ہی وہ اول جز ترکیبی سی س کی م + ا تبادل سی پیدا ہو سکتا ہی
اور اسیواسطی وہ س اور ـَ س مین مختلف العلامت ہوگا

(۳۴۵) اگر دو افقی صفین یا دو عمودی صفین متطابق ہون تو مقطعات معدوم ہوجائینگے
وجہ اسکی یہہ ہی کہ دو افقی صفین یا دو عمودی صفین جب باہم بدلین تو ایک مقطع س سے ـ س
بدل کر ہو جائیگا لیکن اگر دو افقی صفین یا عمودی صفین متطابق ہون تو ان افقی صفون
یا عمودی صفون کا تبادل کچھ تصرف مقطع مین نہین کریگا اور اسیواسطی س = ـ س
اور اسیواسطے س = ۰

(۲۴۴) جب تمام اجزاء ذاتی سوا ایک کی کسی ایک افقی صف میں یا عمودی صف میں معدوم ہوجائیں تو مقطع کی تحویل اوس حاصل ضرب کی طرف ہوجاتی ہے جو رتبہ مابعد کے مقطع اور اوس جز ذاتی کے ضرب دینے سے پیدا ہوتا ہے

مثلاً اس مقطع پر خیال کرو

| ا۱ و ب۱ و س۱ و د۱
| ا۲ و ب۲ و س۲ و د۲
| ا۳ و ب۳ و س۳ و د۳
| ۰ ۰ س۴ ۰

اکیلی افقی صفوں کی تین متواتر تبادل سی ہم اوس افقی صف کو جسمیں س۴ ہی سب سے اوپر کی افقی صف میں لاتی ہیں اور اکیلی عمودی صفوں میں دو متواتر تبادل سی ہم اوس عمودی صف کو جسمیں س۴ ہی اول عمودی صف میں لاتی ہیں پس بموجب دفعہ ۲۴۴ کے

| ا۱ و ب۱ و س۱ و د۱ |
| ا۲ و ب۲ و س۲ و د۲ |
| ا۳ و ب۳ و س۳ و د۳ |
| ۰ ۰ س۴ ۰ |

= (−۱)^۵ ×

| س۴ ۰ ۰ ۰ |
| س۱ و ا۱ و ب۱ و د۱ |
| س۲ و ا۲ و ب۲ و د۲ |
| س۳ و ا۳ و ب۳ و د۳ |

اول جز ترکیبی بائیں طرف س۴ ا۱ ب۲ د۳ ہی اور اور اجزاء ترکیبی ایسے اعداد زیرین کی ترتیبوں سی حاصل ہوسکتی ہیں لیکن س۴ صرف ایک جز ذاتی ہے جسکا عدد زیرین ۴ ہی جو صفر نہیں ہی اور صرف س۴ ہی ہر یک جز ترکیبی کا جز ضربی ہوگا جو معدوم نہیں ہوتا اور یا اور جز ضربی ا۱ ب۲ د۳ سے اعداد زیرین ۱ و ۲ و ۳ کے ترتیبوں سے مشتق ہوتی ہیں پس اصل مقطع کی تحویل

(−۱)^۵ س۴ ×

| ا۱ و ب۱ و د۱
| ا۲ و ب۲ و د۲
| ا۳ و ب۳ و د۳

طریقہ اثبات کا یہی ہے خواہ مقطع مفروضہ کا کچھ ہی رتبہ ہو

اس مثال میں جو علامت منفی کی $(-۱)^۵$ سے پیدا ہوتی ہے اگر ہم چاہیں تو اوسی اسطرح دور کر سکتے ہیں کہ تیسری رتبہ کی مقطع میں دو افقی صفوں کو یا دو عمودی صفوں کو تبدیل کر دیں

(۳۴۷) ن رتبی کی مقطع کی صف افقی جو سب سی اوپر ہو وہ ن-۱ متواتر تبادل سی دو افقی صفوں کی سب سی نیچی اسکتی ہی اور علی ہذا القیاس اول عمودی صف اخر عمودی صف کے ن-۱ متواتر تبادل سی دو عمودی صفوں کے بن سکتی ہی انمیں سی ہر ایک کو دور تبادل کہتے ہیں اور بعض اوقات عمودی یا افقی صفوں کو زیادہ بالقرینہ بنانے کی واسطی اسمیں اسانی ہوتی ہے کہ تبادل مفروضہ افقی صفوں یا عمودی صفوں کا دور تبادل کی تسلسل سی حاصل کریں

مثال گذشتہ میں ہم س۴ کو جس جگہ قائم کرنا چاہتی تہی اوس جگہ اسطرح لے ائی کہ تین متواتر دور تبادل افقی صفوں کی اور دو متواتر دور تبادل عمودی سطروں کی لئی پس اصل مقطع کے واسطی یہہ متواتر صورتین حاصل ہوئین

$(-۱)^۳$

ا۲	ب۲	س۲	د۲
ا۳	ب۳	س۳	د۳
۰	۰	س۴	۰
ا۱	ب۱	س۱	د۱

$(-۱)^۶$

ا۳	ب۳	س۳	د۳
۰	۰	س۴	۰
ا۱	ب۱	س۱	د۱
ا۲	ب۲	س۲	د۲

$(-۱)^۹$

۰	۰	س۴	۰
ا۱	ب۱	س۱	د۱
ا۲	ب۲	س۲	د۲
ا۳	ب۳	س۳	د۳

$(-۱)^{۱۲}$

۰	س۴	۰	۰
ب۱	س۱	د۱	ا۱
ب۲	س۲	د۲	ا۲
ب۳	س۳	د۳	ا۳

$(-۱)^{۱۵}$

س۴	۰	۰	۰
س۱	د۱	ا۱	ب۱
س۲	د۲	ا۲	ب۲
س۳	د۳	ا۳	ب۳

$(-۱)^{۱۵}$ س۴

د۱	ا۱	ب۱
د۲	ا۲	ب۲
د۳	ا۳	ب۳

(۳۴۸) ہر ایک مقطع ہمیشہ ایک اعلی رتبہ کی مقطع کی صورت میں بیان ہو سکتا ہے مثلا بموجب دفعہ ۳۴۷ کے

(۳۵۰) اگر ایک افقی صف یا عمودی صف میں ہر ایک جزو ذاتی کسی مقدار معلوم میں ضرب کیا ہے تو وہ مقطع اوس مقدار میں ضرب کیا جاتا ہے

فرض کرو کہ س = لے و ۱ لے و ۱ + لے و ۲ لے و ۲ + ... لے و ن لے و ن

اور دیں افقی صف میں ہر ایک رقم ع میں ضرب دیجائے تو ہم ع لے و ۱ کو لے و ۱ اور ع لے و ۲ کو لے و ۲ کی جگہ اور علی ہذا القیاس رکھیں تو مقطع جدید کے واسطے ع گنا نتیجہ اول کا حاصل ہوگا

اور اسیطرح اس مسئلہ کو ثابت کرسکتے ہیں اگر عمودی صف کی ہر ایک رقم کسی مقدار معلوم میں ضرب کیا گیا ہے

(۳۵۱) اگر ایک افقی صف میں یا عمودی صف میں ہر ایک جزو ذاتی مجموعہ م رقموں کا ہو تو مقطع کو مجموعہ م مقطعات کا خیال کرسکتے ہیں

مثلاً فرض کرو کہ دیں افقی صف کا ہر جزو ذاتی مجموعہ م ارقام کا ہو اور فرض کرو کہ

لے و ۱ = ع ۱ + ق ۱ + ر ۱ + ...

لے و ۲ = ع ۲ + ق ۲ + ر ۲ + ...

لے و ۳ = ع ۳ + ق ۳ + ر ۳ + ...

تو س = لے و ۱ لے و ۱ + لے و ۲ لے و ۲ + ... + لے و ن لے و ن

= ع ۱ لے و ۱ + ع ۲ لے و ۲ + ... + ع ن لے و ن

+ ق ۱ لے و ۱ + ق ۲ لے و ۲ + ... + ق ن لے و ن

+ ر ۱ لے و ۱ + ر ۲ لے و ۲ + ... + ر ن لے و ن

پس س کو مجموعہ اون م مقطعات کا خیال کرسکتے ہیں جنمیں جداگانہ دیں افقی صفیں یہہ ہیں

ع ۱ و ع ۲ ... ع ن

ق ۱ و ق ۲ ... ق ن

ر ۱ و ر ۲ ... ر ن

(۳۵۲) اب یہہ بتلائینگے کہ لے و س کے اشکال کسی مقطع میں خود مقطع کی طرح نمایاں ہوتے ہیں مقطع کے

اون اجزاء ترکیبی کے حاصل کرنی کی لئی جنمین ایک خاص جز ذاتی اے وک ملتف ہو اور وہی فقط ہو تمام اجزاء ذاتی کو جو کی وین صف افقی مین صفر سوا اے وک کے فرض کرو تو اے وک کے جگہ رکہنی سے ہم کو امثال مطلوب حاصل ہونگے

مثلاً

اے وک = | ا او ا ... ا او ک-۱ ا او ک+۱ ... ا او ن
اے-۱ او ا ... اے-۱ او ک-۱ اے-۱ او ک اے-۱ او ک+۱ ... اے-۱ او ن
اے+۱ او ا ... اے+۱ او ک-۱ اے+۱ او ک اے+۱ او ک+۱ ... اے+۱ او ن
ان و ا ... ان وک-۱ ان وک ان وک+۱ ... ان و ن

پس اے وک مقطع صورت مین نمایان ہوا اور وہ ن رتبہ کا ہی اے وک کے قیمت پر تغیر کسی اثر ہونے کے ہم۔ بجای ہر یک جز ذاتی کی ک وین صف عمودی سوا ا کے رکہہ سکتی ہین

بموجب دفعات ۳۴۸ یا دفعہ ۳۴۷ کے ہم اے وک کو مقطع (ن -۱) رتبے کا بنا سکتی ہین

پس ہم دفعہ ۳۴۷ کی ترکیب اختیار کرکے ے-۱ مدور تغیر ک-۱ افقی صفون مین اور ک-۱ مدور تغیر عمودی صفون مین کر سکتی ہین اسیواسطے

اے وک = مر × | اے+۱ او ک+۱ ... اے+۱ او ن اے+۱ او ا ... اے+۱ او ک-۱
. . . .
ان وک+۱ ... ان و ن ... ان و ا ... ان وک-۱
ا او ک+۱ ... ا او ن ... ا او ا ... ا او ک-۱
اے-۱ او ک+۱ ... اے-۱ او ن اے-۱ او ا ... اے-۱ او ک-۱

اسمین مر = $(-1)^{(ے-۱+ک-۱)(ن-۱)} = (-1)^{(ے+ک)(ن-۱)}$

(۳۵۳) دفعات ۳۴۹ و ۳۵۲ کی استعانت سی ن رتبہ کی مقطع کو اسطرح بیان کر سکتی ہین کہ

س ۱ و ۱ ۰۰۰ س ۱ ون و

س ن و ۱ ۰۰۰ س ن و ن

ان رموز کا فیصلہ قطعی اس ارتباط عام سے ہوگا کہ

س ی و ک = لے و ۱ ب ک و ۱ + لے و ۲ ب ی و ۲ + ۰۰۰ + لے و ع ب ک و ع

فرض کرو کہ ح ± س ۱ و ۱ س ۲ و ۲ ۰۰۰ س ن و ن کو ب تعبیر کرتا ہے تو ہم نتایج ذیل ثابت کرینگے

(۱) فرض کرو کہ ع چھوٹا بہ نسبت ن کے ہے تو ب = ۰

(۲) فرض کرو کہ ع = ن تو ب برابر حاصل ضرب اون دو مقطعات کے ہوگا جو دو سلک رموز سے کہ موافق اپنی اوسی ترتیب کے لیجائیں شامل ہوتے ہیں

(۳) فرض کرو کہ ع بڑا بہ نسبت ن کی ہی تو ب برابر ہوگا اون ازواج مقطعات کے حاصل ضربوں کی مجموعہ کی جسمین سی ہر زوج مقطعات کا اسطرح بنا ہی کہ ن عمودی صفین ایک معلوم سلک رموز سی ایک مقطع میں لیں اور اوسکی مطابق ن عمودی صفین دوسرے معلوم سلک رموز میں سی دوسرے مقطع کی لئی لیں اول جز ترکیبی ب کا س ۱ و ۱ س ۲ و ۲ ۰۰۰ س ن و ن ہی اور اسکی قیمت یہہ ہے کہ

(ح ۱ ۱ و ر ب ۱ و ر) (ح ۱ ۲ و ص ب ۲ و ص) (ح ۱ ۳ و ط ب ۳ و ط) ۰۰۰

اسمین اول جز ضربی مین ح اوس مجموعہ کو تعبیر کرتا ہی جو بلحاظ ر کے لیا جاے اور دوسرے جز ضربی میں ح اوس مجموعہ کو تعبیر کرتا ہی جو بلحاظ ص کی لیا جاے اور تیسرے جز ضربی مین ح اوس مجموعہ کو تعبیر کرتا ہی جو بلحاظ ط کے لیا جاے اور علی ہذا القیاس اور یہہ مجموعی ایسی ع تک پہلتی ہیں اور یہہ دونوا وسمیں داخل ہیں

پس حاصل ضرب اس جملہ کے قیمتوں کے مجموعہ لینی سے دریافت ہوسکتا ہے کہ

ا ۱ و ر ا ۲ و ص ۰۰۰ ب ۱ و ر ب ۲ و ص ب ۳ ص و ط ۰۰۰

جب کہ ر و ص و ط ۰۰۰ کی تمام صحیح قیمتیں اسی ع تک لیجائیں

اب ہم اس مجموعہ کو

ح ر و ص و ط ۰۰۰ (ا ۱ و ر ا ۲ و ص ا ۳ و ط ۰۰۰ ب ۱ و ر ب ۲ و ص ب ۳ ص و ط ۰۰۰)

اور س کے اور اجزا ترکیبی سی اسطرح حاصل ہوسکتی ہین کہ دوسرے اعداد زیرین کی ترتیبین لین
اور مناسب علامت مقرر کرین اب تمام قیمت س ایک سی یہہ استخراج ہوتا ہی کہ رمز س کے
دوسری عداد زیرین کو بدلنی سی کوئی تغیر رمز ا کے اعداد زیرین مین نہین آتا لیکن رمز ب
کے اول اعداد زیرین بدل جاتی ہین اور صرف یہی بدلتی ہین اسی ہم ایک نتیجہ نکالتی ہین
جو اسطرح تعبیر ہو سکتا ہے

س = سح روص وط . . . (ا۱ اور ا۲ وص ا۳ وط . . . ح ± ب۱ اور ب۲ وص ب۳ وط . .)

یہان ح ± ب۱ ور ب۲ وص ب۳ وط . . . سی ق رتبی کا مقطع دوسرے معلوم سلک رموز کے
خاص افقی صفون کی لینی سی بنتا ہی اور ح کا مرجع اول اعداد زیرین کی تغیرات ہین دفعہ ۳۴۲ کو دیکھو
اس مقطع کون سی تعبیر کرتی ہین اب اول فرض کرو کہ ع چہوٹا بہ نسبت ن کے ہی تو اعداد
زیرین روص وط . . . تعداد مین ن ہین اور کوئی اونمین سی ن سے بڑا نہین ہے
اسی یہہ مستنبط ہوتا ہی کہ اونمین ہمیشہ دو یا زیادہ دو سی ایک ہی قیمت رکھتے ہین پس ن ہمیشہ
بموجب دفعہ ۳۴۵ کے معدوم ہوتا ہے اور اسیواسطی س معدوم ہوتا ہے

دوم فرض کرو کہ ع = ن تو نظم اعداد زیرین کا رص ط . . . ایک ترتیب ن رموز
ا و ۲ . . . ن کی ہوگی اور وہ کچہہ نہ ہوگی جب تک ق کو معدوم نہ کرین اب متواتر
مختلف ترتیبون کی لینی سی علامت ق کی تبدیل ہوگی مگر اوسکی قیمت بموجب دفعہ ۳۴۴ کے
نہین بدلیگی پس قیمت س کی تحویل اوس حاصل ضرب کی طرف ہوگی جو اوس مقطع کو دوسرے
معلوم سلک رموز سی بنانا چاہی مجموعہ تمام اجزا ترکیبی ہین جو ح ± ا۱ وا ا۲ و۲ . ان ون سے
تعبیر ہوتی ہین ضرب دینی سی پیدا ہوا اسمین ح کا مرجع دوسرے اعداد زیرین سے تغیرات مین
اسیواسطی جب ع = ن

$$س = \begin{vmatrix} ا_1 و_1 & \cdots & ا_1 و_ن \\ ا_ن و_1 & \cdots & ا_ن و_ن \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ب_1 و_1 & \cdots & ب_1 و_ن \\ ب_ن و_1 & \cdots & ب_ن و_ن \end{vmatrix}$$

اب اخر فرض کرو کہ ع بڑا بہ نسبت ن کی ہی تو نظم اعداد زیرین رص ط۰۰۰ اجتماع ن اعداد کی ع اعداد او ۲،۰۰ ع مین سی ہوگی اور تعداد ایسی اجتماعون کی $\frac{|ع}{|ن\ |ع-ن}$ ہوگی فرض کرو کہ ق کے معنی موافق سابق کے ہون ب کو اسی بدلنی مین جو ق ہو جای اوسکو ع سی تعبیر کرو اسی معلوم ہوا کہ موافق دوسری صورت کی ہم کو س کے ایک رقم کی واسطی ع ق حاصل ہوگا اور یہہ اسطرح پیدا ہوتا ہے کہ $\frac{|ع}{|ن\ |ع-ن}$ مین سی ممکن محدود اجتماع منتخب کرلین اسیواسطی جسبا ع بڑا بہ نسبت ن کے ہے تو ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ س = ح ع ق اسمین ح مجموعہ $\frac{|ع}{|ن\ |ع-ن}$ ارقام کا ہے جو ممکن اجتماعون سی پیدا ہوتا ہے

(۳۵۵) دفعہ گذشتہ کی دوسری صورت مین ہم دیکھتی ہین کہ حاصل ضرب ن رتبی کی دو مقطعات کا ن ہی رتبہ کی مقطع مین نمایان ہو سکتا ہی اور علی ہذا القیاس حاصل ضرب ن رتبی کی تین مقطعات کا ن ہی رتبہ کی مقطع مین نمایان ہو سکتا ہی اسواسطی کہ اول ہم ن رتبی کی دو مقطعات کی حاصل ضرب کو ن رتبی کے مقطع صورت مین نمایان کر سکتی ہین اور اس جدید مقطع اور اصل مقطعات مین سے تیسرے مقطع کو ن رتبی کی مقطع کی صورت مین ظاہر کر سکتی ہین پس ہم دیکھتی ہین کہ حاصل ضرب تعداد مقطعات کا جو ایک ہی رتبی کے ہون اوسی رتبی مین نمایان ہو سکتا ہے اسی معلوم ہوا کہ اکثر حاصل ضرب مقطعات کا خواہ کسی رتبی کے ہون اور کتنی ہون اوسی رتبے کے مقطع کے صورت مین اور اجزار ضربی کی اعلی رتبہ کے مقطع کے صورت مین بھی نمایان ہو سکتا ہی اسواسطی کہ بموجب دفعہ ۳۴۸ کی اور سب مقطعات مثل اعلی رتبے کے مقطع کی بن سکتی ہین اور جب یہہ بن جائین تو ان مقطعات کا حاصل ضرب اوسی رتبے کے مقطع کی صورت مین بن سکتی ہین

(۳۵۶) فرض کرو کہ ہم کو حاصل ضرب دو مقطعات کا بنانا ہے

کا کہتے ہیں

(۳۵۸) ایک نظم کا مقطع جو متکافی نظم مفروضہ ن۲ رموز کا ہو وہ (ن-۱) ویں قوت کا مقطع نظم مفروضہ کا ہوتا ہے

اگر ہم ان مقطعات کو ضرب دیں

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_{\text{۱،۱}} & \cdots & \text{ا}_{\text{۱،ن}} \\ \vdots & & \vdots \\ \text{ا}_{\text{ن،۱}} & \cdots & \text{ا}_{\text{ن،ن}} \end{vmatrix}$$

اور

$$\begin{vmatrix} \hat{\text{ا}}_{\text{۱،۱}} & \cdots & \hat{\text{ا}}_{\text{۱،ن}} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{\text{ا}}_{\text{ن،۱}} & \cdots & \hat{\text{ا}}_{\text{ن،ن}} \end{vmatrix}$$

تو حاصل ضرب کے واسطے یہہ حاصل ہوگا

$$\begin{vmatrix} \text{س}_{\text{۱،۱}} & \cdots & \text{س}_{\text{۱،ن}} \\ \vdots & & \vdots \\ \text{س}_{\text{ن،۱}} & \cdots & \text{س}_{\text{ن،ن}} \end{vmatrix}$$

جسمیں $\text{س}_{\text{رک}} = \text{ا}_{\text{ے،۱}}\hat{\text{ا}}_{\text{ک،۱}} + \text{ا}_{\text{ے،۲}}\hat{\text{ا}}_{\text{ک،۲}} + \cdots + \text{ا}_{\text{ے،ن}}\hat{\text{ا}}_{\text{ک،ن}}$

اسی معلوم ہوا کہ موافق دفعہ ۳۴۹ کے آخر مقطع کی اجزاء ذاتی کی قیمت س ہوگی اگر ے اور ک برابر ہیں یا صفر ہوگی اگر ے اور ک غیر ساوی ہیں پس یہہ مقطع اپنی اول جزء ترکیبی $\text{س}_{\text{۱،۱}}\,\text{س}_{\text{۲،۲}} \cdots \text{س}_{\text{ن،ن}}$ یعنی $\text{س}^{\text{ن}}$ کی طرف تحویل ہوتی ہے اسواسطے

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_{\text{۱،۱}} & \cdots & \text{ا}_{\text{۱،ن}} \\ \vdots & & \vdots \\ \text{ا}_{\text{ن،۱}} & \cdots & \text{ا}_{\text{ن،ن}} \end{vmatrix} \text{س} = \text{س}^{\text{ن}}$$

اسواسطے

$$\begin{vmatrix} \hat{\text{ا}}_{\text{۱،۱}} & \cdots & \hat{\text{ا}}_{\text{۱،ن}} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{\text{ا}}_{\text{ن،۱}} & \cdots & \hat{\text{ا}}_{\text{ن،ن}} \end{vmatrix} = \text{س}^{\text{ن}-۱}$$

(۳۵۹) فرض کرو کہ ایک ن رتبہ کا مقطع ہیا اور رمز کے مربع میں جو اس کو تعبیر کرے

م افقی صفین اور م عمودی صفین معدوم ہوں اور باقی رموز کو سرکا کر ایک رمز کے جدید
مربع میں لکھیں جون — م رتبی کا مقطع ہی تو اس مقطع کو مقطع جزئیہ یا مقطع اصغر بلحاظ
اصلی مقطع کی کہتی ہیں اور رموز جو مشترک افقی اور عمودی صفوں میں ہوتی ہیں اون سے
ایک مربع رمز کا بنیگا جو ایک مقطع م رتبی کا ہوگا یہہ بہی مقطع جزئیہ یا مقطع اصغر ہے
ان دو مقطعات جزئیہ یا اصغر کو ایک دوسری کا متمم کہتے ہیں

(۳۶۰) ن رتبی کی مقطع کو س تعبیر کرتا ہی م رتبہ کا مقطع جزئیہ نظم متکافیہ کا تعداد گ
برابر ہوتا ہی حاصل ضرب $س^{م-۱}$ اور اصل نظم کے مقطع جزئیہ متمم کے

فرض کرو کہ ت وح و ... روص ایک ترتیب اعداد ا و ۲ ... ن کو تعبیر کرا وے وک و ... لو ومو
دوسری ترتیب کو تعبیر کریں اور ت وح ... اور ے وک ... اور م ہر ایک کو م عددوں کی جماعتیں فرض کرو
اور روص ... اور لو ومو ... کو ن — م عددوں کی جماعتیں فرض کرو پس

| اف وے واف وک ... |
| اح وے واح وک |

مقطع جزئیہ نظم متکافیہ کا م رتبہ کا ہے اسکو ص سے تعبیر کرو

اب | اف وے واف وک ... اف ولو واف ومو ... |
| اح وے واح وک ... اح ولو واح ومو ... |
| ... |
| ار وے وار وک ... ار ولو وار ومو |
| اص وے واص وک ... اص ولو واص ومو ... | = م س

مراسمیں ۱+ ہی اگر ترتیبیں ت وح و ... روص اور ے وک ... لو ومو کی
ایک ہی نوع کی ہوں اور -۱ ای اگر اونکی ترتیبیں مختلف نوع کی ہوں
اب ہم ان دو مقطعات کا حاصل ضرب دریافت کرتے ہیں بموجب دفعہ ۳۴۸ کی اجزائے ذاتی کے
ازدیاد سی مقطع ص کا ن رتبہ پر صعود کرسکتا ہی پس م بجای ض کے

مقطع ذیل لکھتی ہین

ان وے و ان وک . . . ان ولو ان ومو . .
لح وے و لح وک . . . لح ولو لح ومو . .
ب ر وے و ب ر وک . . . ب ر ولو ب ر ومو .
ب ص وے و ب ص وک . . . ب ص ولو ب ص ومو . .

اسمین ب مع اعداد زیرین کی جن اجزاء ذاتی کو تعبیر کرتا ہی صفر مقرر کی گئی ہین مگر وہ اجزاء ذاتی مستثنی ہین جو قطر مین لکھی ہین وہ سب برابر واحد کے فرض کئی گئی ہین

اب حاصل ضرب ص اور مرس کا بناء تو وہ ایک جدید مقطع ن رتبے کا ہوگا

فرض کرو کہ اجزاء ذاتی اس جدید مقطع کو حرف س مع دو اعداد زیرین کے تعبیر کرے اور ان اعداد زیرین مین سی موافق دستور کی ایک افقی صف کو اور دوسرا عمودی صف کو تعبیر کرے بموجب دفعہ ۳۵۶ کی چار طریقے ہین جنسی ہم حاصل ضرب ص اور مرس کے اجزاء ذاتی کو دریافت کرسکتے ہین انہین سی اول طریقہ کو ہم اختیار کرتے ہین اس طریقہ کے موافق س ع وق اسطرح حاصل ہوتا ہی کہ ص کی ع وین افقی صف کے اجزاء ذاتی کو جداگانہ مرس کی ق وین افقی صف مین ضرب دین تو

س ا و ا = ان وے ان وے + ان وک ان وک + . . . + ان ولو ان ولو + ان ومو ان ومو + . .

س ا و ۲ = ان وے لح وے + ان وک لح وک + . . . + ان ولو لح ولو + ان ومو لح ومو + . .

اسیواسطی بموجب دفعہ ۳۴۹ کے س ا و ا و س ا و ۲ . . . س م و م برابر س کے حاصل ہونگے اور باقی اور اجزاء ذاتی اوس مقطع کے م افقی صفون کے جو ص اور مرس سی حاصل ہوتا ہے صفر ہونگے (م + ۱) وین صف مین اول رقم کے واسطے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

س م + ۱ و ا = ب ر وے ان وے + ب ر وک ان وک + . . . + ب ر ومو ان ومو + . . . = ان ولو

اسواسطی کہ ب مع اعداد زیرین کے جو واقع ہوتی ہین جن رموز کو تعبیر کرتا ہے

وہ صفر ہیں مگر ب رولو واحد ہی اور اسیطرح (م + ۱) افقی صف ہیں دوسرا رقم یہہ ہم کو حاصل ہوتی ہے کہ

س م+۱ و م+۲ = لح ولو

اسیطرح عمل کرنے سے ہم کو یہہ دریافت ہوگا کہ (م + ۱) وین افقی صف حاصل ضرب ص اور مر س مین وہی ہی جو مر س مین (م + ۱) وین صف ہے

علی ہذا القیاس (م + ۲) وین افقی صف حاصل ضرب مین وہی ہے جو (م + ۲) وین عمودی صف مر س مین ہے، پس مقطع جو ساوی لہ ص مر س کا ہو جب دفعہ ۳۴۶ کے تحویل اوس حاصل ضرب کی طرف ہو سکتا ہی جو مر اور ذیل کے (ن - م) رتبہ کے مقطع کو ضرب دینے سے پیدا ہوتا ہے

لرولو لردمود . . .

لص ولو لص ومود . . . .

ص = مر م-۱ | لردمود لرولو . . . . |
| لص ولو لص ومو . . . . |

(۳۶۱) امثلہ ذیل طالب علم ثابت کرے امثلہ (۴) و (۵) (۶) مین ہم نی وہ مقطعات لکھی ہیں جنکے اجزا ذاتی خود مقطعات ہیں

(۱)
| ۰ و سہ و صہ و لر |
| سہ و ۰ و لر۱ و صہ۱ |
| صہ و لر و ۰ و سہ۱ |
| لر و صہ۱ و سہ۱ و ۰ |
= سہ۲ سہ۱۲ + صہ۲ صہ۱۲ + لر۲ لر۱۲ - ۲ سہ سہ۱ صہ صہ۱ - ۲ سہ سہ۱ لر لر۱ - ۲ صہ صہ۱ لر لر۱

(۲)
| ۰ و سہ و صہ و لر |
| - سہ و ۰ و لر۱ و صہ۱ |
| - صہ و - لر۱ و ۰ و سہ۱ |
| - لر و - صہ۱ و سہ۱ و ۰ |
= (سہ سہ۱ - صہ صہ۱ + لر لر۱)۲

(۳) $\begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ص} & \text{س} & \text{ر} \\ \text{ص}_1 & \text{ل}_1 & \text{ر} & -\text{س} \\ \text{س}_1 & \text{ر} & -\text{ل}_1 & -\text{ص} \\ \text{ر} & -\text{س}_1 & -\text{ص}_1 & -\text{ل} \end{vmatrix} = \text{ر}^4 + \text{ر}^2(\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ل}^2 + \text{س}_1^2 + \text{ص}_1^2 + \text{ل}_1^2) + (\text{س}\,\text{س}_1 - \text{ص}\,\text{ص}_1 + \text{ل}\,\text{ل}_1)^2$

(۴) $\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{ج} & \text{س} \\ \text{ا} & \text{ح} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ح} \\ \text{ھ} & \text{ف} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ح} \\ \text{ھ} & \text{ف} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \text{ھ} & \text{ا} \\ \text{ب} & \text{ح} \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \text{ا} \begin{vmatrix} \text{ح} & \text{ھ} & \text{ا} \\ \text{ف} & \text{ب} & \text{ھ} \\ \text{س} & \text{ف} & \text{ح} \end{vmatrix}$

(۵) $\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ح} \\ \text{ھ} & \text{ف} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ف} \\ \text{ح} & \text{ھ} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \text{ھ} & \text{ا} \\ \text{ب} & \text{ھ} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ھ} \\ \text{ف} & \text{ح} \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \text{ھ} \begin{vmatrix} \text{ح} & \text{ھ} & \text{ا} \\ \text{ف} & \text{ب} & \text{ھ} \\ \text{س} & \text{ف} & \text{ح} \end{vmatrix}$

(۶) $\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{ف} & \text{ب} \\ \text{س} & \text{ف} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ف} \\ \text{ح} & \text{ھ} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ھ} \\ \text{ف} & \text{ح} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ف} \\ \text{ح} & \text{ھ} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \text{ح} & \text{س} \\ \text{ا} & \text{ح} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ح} \\ \text{ھ} & \text{ف} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ھ} \\ \text{ف} & \text{ح} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ح} \\ \text{ھ} & \text{ف} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \text{ھ} & \text{ا} \\ \text{ب} & \text{ھ} \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \text{مجذور} \begin{vmatrix} \text{ح} & \text{ھ} & \text{ا} \\ \text{ف} & \text{ب} & \text{ھ} \\ \text{س} & \text{ف} & \text{ح} \end{vmatrix}$

(۷) $\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ا} \\ \text{ب}_1 & \text{ا}_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{د} & \text{س} \\ \text{د}_1 & \text{س}_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ب} \\ \text{س}_1 & \text{ب}_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{د} & \text{ا} \\ \text{د}_1 & \text{ا}_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{س} \\ \text{ا}_1 & \text{س}_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{د} & \text{ب} \\ \text{د}_1 & \text{ب}_1 \end{vmatrix} = ۰$

ستائیسواں باب

استعمال مقطعات

(۳۶۲) فرض کرو ن مقادیر مجہول لا۱ و لا۲ ۰۰۰ لان کی قیمتیں ان ن مساواتوں سی دریافت کرنے ہیں

ا۱ لا۱ + ا۱و۲ لا۲ + ا۱و۳ لا۳ + ۰۰۰ + ا۱ون لان = لو۱

ا۲و۱ لا۱ + ا۲و۲ لا۲ + ا۲و۳ لا۳ + ۰۰۰ + ا۲ون لان = لو۲

ان و۱ لا۱ + ان و۲ لا۲ + ان و۳ لا۳ + ۰۰۰ + ان ون لان = لون

فرض کرو کہ س مقطع ح ± ا۱و۱ ا۲و۲ ۰ ان ون کو تعبیر کرتا ہی اور ا ک امثال ا ک کو س میں تعبیر کرتی ہیں تو قیمتیں مقادیر مجہول کی اس صورت قانونی سے معلوم ہونگی

س لاک = لو۱ ا۱وک + لو۲ ا۲وک + ۰۰۰۰ + لون ان وک

اسمیں ک کوئی قیمت درمیان ۱ اور ن کے ہی اور یہہ دونوا و نمیں داخل ہیں اسواسطی کہ معلوم مساواتوں کو جداگانہ ا۱وک و ا۲وک ۰۰ ان وک میں ضرب دو اور حاصل ضربوں کو جمع کرو تو امثال لاک کے

ا۱وک ا۱وک + ا۲وک ا۲وک + ۰۰ + ان وک ان وک

یہہ بموجب دفعہ ۳۴۹ کے برابر س کے ہیں اور امثال لا۱ کے

ا۱وی ا۱وک + ا۲وی ا۲وک + ۰۰۰ + ان وی ان وک

اور یہہ بموجب دفعہ ۳۴۹ کے صفر ہے

اوس صورت قانونی کو جسسے لاک معلوم ہو اسطرح لکہ سکتی ہیں

س لاک = ص

اسمیں ص ایک مقطع ہے یعنی وہ مقطع ہے جو اسطرح بنتا ہے کہ س سے ک وین افقی صفیں س کے ساقط کریں اور اونکی جگہ وہ عمودی صف رکھیں جو لو۱ و لو۲ ۰ لو سی مرتب ہوتی ہے

(۳۶۳) فرض کرو کہ مقطع س فنا ہوتا ہی تو قیمتیں مقادیر مجہول کی غیر متناہی ہو جائینگی اسی یہہ معلوم ہوگا کہ مساواتیں معلوم غیر مطابق ہیں جبر مقابلہ کا بیستویں باب دیکھو

(۳۶۴) فرض کرو کہ لو۱ لو۲ ۰۰۰ لون معدوم ہوتے ہین اور س بہی فنا ہوتا ہے تو دفعہ ۳۶۲ کے ترکیب سی مقادیر مجہول غیر المعین صورت ۰/۰ کی ہوجائیگی اس صورت مین ہم ن - ۱ مساواتین معلوم مساواتون مین سی لین تو نسبت ن - ۱ مقادیر مجہول کی باقی مقدار مجہول کی ساتہہ دریافت کرنی کی واسطی یہہ مساواتین کافی ہونگین

یہہ نسبتین بہی ایک دفعہ معین ہو سکتی ہین اسواسطی کہ ہم کو یہہ حاصل ہو سکتا ہے کہ

لا۱ : لا۲ : لا۳ ۰۰۰ = ۱/(ک - و۱) : ۱/(ک - و۲) : ۱/(ک - و۳) ۰۰۰

اسمین ک ایک صحیح عدد ہے اور ن سے بڑا نہین ہے

دلیل اس سبب سے کہ س = ۰ تو بموجب دفعہ ۳۴۹ کے ک اور ک کی تمام صحیح قیمتون ۱۱ اور ن کے درمیان ہونگین

ا ک و۱ ۱/(ک - و۱) + ا ک و۲ ۱/(ک - و۲) + ا ک و۳ ۱/(ک - و۳) + ۰۰۰ = ۰

اور جب لا۱ و لا۲ و لا۳ ۰۰۰ اوپر کی نسبت معینہ کے موافق لی گئی ہین تو ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

۱/(ک - و۱) لا۱ + ا ک و۲ لا۲ + ا ک و۳ لا۳ + ۰۰۰ = ۰

معلوم مساواتون مین سی ن - ۱ مساواتین لین اور لو۱ و لو۲ ۰۰۰ لو۳ ہر ایک کو برابر صفر کے فرض کرین تو ہم کو اکثر اکیلی محدود قیمت ہر ایک (ن - ۱) مقادیر مجہول اور باقی مقدار مجہول مین نسبت معلوم ہوجائیگی

اسی یہہ استخراج ہوتا ہے کہ جب س = ۰ تو

۱/(ک - و۱) : ۱/(ک - و۲) : ۱/(ک - و۳) : ۰۰۰

بالکل بے لگاؤ سے ہین

(۳۶۵) اگر لو۱ و لو۲ ۰۰۰ لون تمام معدوم ہوجائین اور س فنا نہ ہو تو نظم مساوات کا دفعہ ۳۶۲ مین کوئی حل نہین رکہتا الا اوس حالت مین کہ لا۱ و لا۲ و لا۳ ۰۰۰ لان تمام صفر ہون شرط س = ۰ ضروری تا کہ مقادیر مجہول کی قیمتین جو صفر نہ ہون دریافت ہو جائین

(۳۶۶) معادلات

$$\text{ا}_1\text{لا} + \text{ب}_1\text{د} + \text{س}_1\text{ی} = ۰$$
$$\text{ا}_2\text{لا} + \text{ب}_2\text{د} + \text{س}_2\text{ی} = ۰$$
$$\text{ا}_3\text{لا} + \text{ب}_3\text{د} + \text{س}_3\text{ی} = ۰$$

مین حل کی قابلیت جو صفر نہ ہو جب ہو گی کہ ہم کو یہہ حاصل ہو کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{س}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{س}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{س}_3 \end{vmatrix} = ۰$$

اگر یہہ شرط پوری ہوتی ہو تو معادلات کی شرائط بھی اسی پوری ہونگین کہ

$$\text{لا} : \text{د} : \text{ی} :: \begin{vmatrix} \text{ب}_2 & \text{س}_2 \\ \text{ب}_3 & \text{س}_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \text{س}_2 & \text{ا}_2 \\ \text{س}_3 & \text{ا}_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{یا لا} : \text{د} : \text{ی} :: \begin{vmatrix} \text{ب}_3 & \text{س}_3 \\ \text{ب}_1 & \text{س}_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \text{س}_3 & \text{ا}_3 \\ \text{س}_1 & \text{ا}_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \text{ا}_3 & \text{ب}_3 \\ \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \end{vmatrix}$$

$$\text{یا لا} : \text{د} : \text{ی} :: \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{س}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{س}_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \text{س}_1 & \text{ا}_1 \\ \text{س}_2 & \text{ا}_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix}$$

یہہ تینوں صورتین حل کی موافق دفعہ ۳۶۴ کے ایک دوسرے کے ساتھہ منطبق ہوتی ہین

(۳۶۷) دفعہ ۳۶۲ کے معادلات سے ہم یہہ استنباط کرتے ہین کہ

$$\text{لو}_1\text{ا}_1\text{و}_1 + \text{لو}_2\text{ا}_2\text{و}_1 + \text{لو}_3\text{ا}_3\text{و}_1 + \cdots + \text{لو}_\text{ن}\text{ا}_\text{ن}\text{و}_1 = \text{س لا}_1$$
$$\text{لو}_1\text{ا}_1\text{و}_2 + \text{لو}_2\text{ا}_2\text{و}_2 + \text{لو}_3\text{ا}_3\text{و}_2 + \cdots + \text{لو}_\text{ن}\text{ا}_\text{ن}\text{و}_2 = \text{س لا}_2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{لو}_1\text{ا}_1\text{و}_\text{ن} + \text{لو}_2\text{ا}_2\text{و}_\text{ن} + \text{لو}_3\text{ا}_3\text{و}_\text{ن} + \cdots + \text{لو}_\text{ن}\text{ا}_\text{ن}\text{و}_\text{ن} = \text{س لا}_\text{ن}$$

یہہ مقطع ایک جملہ ناطقہ صحیحہ مقادیر $س_1$ و $س_2$ ... $س_ن$ کا ہی اور وہ بموجب دفعہ ۳۴۵ کے معدوم ہوتا ہی اگر کوئی دو اونمیں سی برابر ہوں اسواسطی وہ اوس حاصل ضرب پر جس کو ع سی تعبیر کیا ہی تقسیم ہو سکتا ہی اور یہہ اور نیز مقطع اور حاصل ضرب ع دونو $\frac{ن(ن-1)}{2}$ درجہ کے ہوا اور حواصل ضرب $س_1$ و $س_2$ ... $س_ن$ مین ہین اسیواسطی اب مقطع کو ع پر تقسیم کرین تو کوئی عدد خارج قسمت ہوگا اور یہہ عدد چاہی کہ واحد ہو کیونکہ یہہ اول جزو ترکیبی مقطع کو اون اجزاء ضربی ثنائی کے حاصل ضرب کے اول ارقام سی مقابلہ کر کے ہم دیکھتی ہین اور ع ان اجزاء ضربی سے مرکب ہے

(۳۶۹) ن رتبی کے مقطع مین $\underline{ن}$ رقمین ہین حاصل ضرب ع مین پہلی مختصر ہونے سے اور محو ہوتی سی بہت سی رقمین ہونگین یعنی $\frac{ن(ن-1)}{2}$ پس کثرت ارقام کی بچنی کی لئی مقطع بڑی فایدہ مند صورت حاصل ضرب کے واسطے ہے

(۳۷۰) ہم کو حاصل ہے کہ

$$ع^2 = \begin{vmatrix} 1 & س_1 & س_1^2 & \cdots & س_1^{ن-1} \\ 1 & س_2 & س_2^2 & \cdots & س_2^{ن-1} \\ \vdots \\ 1 & س_ن & س_ن^2 & \cdots & س_ن^{ن-1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & س_1 & س_1^2 & \cdots & س_1^{ن-1} \\ 1 & س_2 & س_2^2 & \cdots & س_2^{ن-1} \\ \vdots \\ 1 & س_ن & س_ن^2 & \cdots & س_ن^{ن-1} \end{vmatrix}$$

اب حاصل ضرب ان مقطعات کا ایکلی مقطع کی صورت مین نمایان ہو سکتا ہے۔ دفعہ ۳۶۵ مین جو چار ترکیبین لکھی ہین اونمین سی اخر ترکیب کے اختیار کرنے سے

$$ع^2 = \begin{vmatrix} ص_. & ص_1 & ص_2 & \cdots & ص_{ن-1} \\ ص_1 & ص_2 & ص_3 & \cdots & ص_ن \\ \vdots \\ ص_{ن-1} & ص_ن & ص_{ن+1} & \cdots & ص_{2ن-2} \end{vmatrix}$$

اسمین $ص_1 = س_1 + س_2 + \cdots س_ن$

(۳۷۱) مثلاً فرض کرو کہ $س_1$ و $س_2$ ... ن قیمتین ن درجہ کی ایک مساوات کی ہین تو $ع^2$

قیمتوں کے فرقوں کی حاصل ضرب کا مجذور ہوگا پس مساوات کی قیمتوں کی فرقوں کے مجذور ایک مقطع کی صورت میں نمایاں ہو سکتی ہیں اور اس مقطع کے اجزاء ذاتی مساوات معلوم کی امثال میں معلوم ہونگے اسواسطی کہ ص، امثال کی رقموں میں بیان ہو سکتا ہی

(۳۷۲) فرض کرو کہ ن مقادیر مجہولہ لا، و لا۲ ... لان کی قیمتیں ہم ان مساواتوں سی دریافت کرتی ہیں کہ

$$لا_1 + لا_2 + لا_3 + \cdots + لا_ن = ۱$$

$$لا_1 س_1 + لا_2 س_2 + لا_3 س_3 + \cdots + لا_ن س_ن = ط$$

$$لا_1 س_1^2 + لا_2 س_2^2 + لا_3 س_3^2 + \cdots + لا_ن س_ن^2 = ط^2$$

$$لا_1 س_1^{ن-1} + لا_2 س_2^{ن-1} + لا_3 س_3^{ن-1} + \cdots + لا_ن س_ن^{ن-1} = ط^{ن-1}$$

قیمتیں مقادیر مجہولہ کی اس صورت قانونی سی معلوم ہوا کرینگے کہ

$$لا_ے = \frac{(س_1 - ط)(س_2 - ط)\cdots(س_{ے-1} - ط)(س_{ے+1} - ط)\cdots(س_ن - ط)}{(س_1 - س_ے)(س_2 - س_ے)\cdots(س_{ے-1} - س_ے)(س_{ے+1} - س_ے)\cdots(س_ن - س_ے)}$$

اسواسطی کہ بموجب دفعہ ۳۶۲ کے

$$س\, لا_ے = ص_ے$$

اسمیں س =

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & \cdots & ۱ \\ س_1 & س_2 & س_3 & \cdots & س_ن \\ س_1^2 & س_2^2 & س_3^2 & \cdots & س_ن^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ س_1^{ن-1} & س_2^{ن-1} & س_3^{ن-1} & \cdots & س_ن^{ن-1} \end{vmatrix}$$

اور ص =

$$\begin{vmatrix} ۱ & \cdots & ۱ & ۱ & ۱ & \cdots & ۱ \\ س_1 & \cdots & س_{ے-1} & ط & س_{ے+1} & \cdots & س_ن \\ س_1^2 & \cdots & س_{ے-1}^2 & ط^2 & س_{ے+1}^2 & \cdots & س_ن^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ س_1^{ن-1} & \cdots & س_{ے-1}^{ن-1} & ط^{ن-1} & س_{ے+1}^{ن-1} & \cdots & س_ن^{ن-1} \end{vmatrix}$$

اب فرض کرو کہ ے ویں عمودی صف س میں اول رکھی جای اور ے ویں عمودی صف ص میں اول رکھی جای دفعہ ۳۴۷ کو دیکھو پہر بموجب دفعہ ۳۶۸ کے دونو

مقطعات فرقون کے حواصل ضرب سے بدل جائین اور اجزاء ضربی شمار کنندہ اور نسب نما مین بخوبی اجائین تو لا کی قیمت اوپر کی صورت معینہ مین ہم کو معلوم ہوگی

(۲۷۳) مساوات معلوم سے خاص مقادیر کے ساقط کرنے سے ایک مساوات حاصل کرنے کی اندر بھی ترکیب مقطعات کی کام آتی ہی فرض کرو کہ معادلات $ح(لا) = 0$ اور $\bar{ح}(لا) = 0$ مین ہم کو لا ساقط کرنا ہے اسمین

$$ح(لا) = ا_0 + ا_1 لا + ا_2 لا^2 + ا_3 لا^3$$

$$\bar{ح}(لا) = ب_0 + ب_1 لا + ب_2 لا^2$$

اب ہم عمل اسطرح کرتے ہین کہ

$$ح(لا) = ا_0 + ا_1 لا + ا_2 لا^2 + ا_3 لا^3$$

$$لا\, ح(لا) = 0 + ا_0 لا + ا_1 لا^2 + ا_2 لا^3 + ا_3 لا^4$$

$$\bar{ح}(لا) = ب_0 + ب_1 لا + ب_2 لا^2$$

$$لا\, \bar{ح}(لا) = 0 + ب_0 لا + ب_1 لا^2 + ب_2 لا^3 + 0$$

$$لا^2\, \bar{ح}(لا) = 0 + 0 + ب_0 لا^2 + ب_1 لا^3 + ب_2 لا^4$$

فرض کرو کہ

$$س = \begin{vmatrix} ا_0 & ا_1 & ا_2 & ا_3 & 0 \\ 0 & ا_0 & ا_1 & ا_2 & ا_3 \\ ب_0 & ب_1 & ب_2 & 0 & 0 \\ 0 & ب_0 & ب_1 & ب_2 & 0 \\ 0 & 0 & ب_0 & ب_1 & ب_2 \end{vmatrix}$$

اور چونکہ بموجب فرض کے ح (لا) اور مح (لا) صفر ہین اسواسطی لا ح (لا) و و لا مح (لا)
اور لاؔ (مح لا) بہی صفر ہین تو بموجب دفعہ ۳۵۵ کی یہہ مستنبط ہوتا ہی کہ س = ۰ کی ہونا
ایک ضروری شرط ہی جو مثال ح (لا) اور مح (لا) مین ہونی چاہیی

(۳۷۴) ہمنے ایک خاص مثال تحقیقات عامہ کی دفعہ گذشتہ مین لکہی تہی اب ہم اوسکو
اسطرح لکہتی ہین کہ وہ زیادہ سمجہہ مین اوی فرض کرو کہ

$$ح (لا) = ا_٠ + ا_١ لا + ا_٢ لا^٢ + ... + ا_م لا^م = ٠$$

$$مح (لا) = ب_٠ + ب_١ لا + ب_٢ لا^٢ + ... + ب_ن لا^ن = ٠$$

اب ان مساواتون مین سی لا کو ساقط کرنا ہے اب ہم کو یہہ حاصل ہے کہ

$$ح (لا) = ا_٠ + ا_١ لا + ا_٢ لا^٢ + ... + ا_م لا^م$$

$$لا ح (لا) = ا_٠ لا + ا_١ لا^٢ + ا_٢ لا^٣ + ... + ا_م لا^{م+١}$$

$$لا^{ن-١} ح (لا) = ا_٠ لا^{ن-١} + ... ا_م لا^{م+ن-١}$$

$$مح (لا) = ب_٠ + ب_١ لا + ب_٢ لا^٢ + ... + ب_ن لا^ن$$

$$لا مح (لا) = ب_٠ لا + ب_١ لا^٢ + ... + ب_{ن-١} لا^ن + ب_ن لا^{ن+١}$$

$$لا^{م-١} مح (لا) = ب_٠ لا^{م-١} + ب_١ لا^م + ...$$

فرض کرو کہ م + ن رتبی کی مقطع کو س تعبیر کرتا ہی جسکی اول صفین یہہ ہین کہ

$$ا_٠ \quad ا_١ \quad ا_٢ \quad ... \quad ا_م \quad ٠ \quad ٠ \quad ...$$

$$٠ \quad ا_٠ \quad ا_١ \quad ... \quad ا_{م-١} \quad ا_م \quad ٠$$

$$٠ \quad ٠ \quad ا_٠ \quad ... \quad ا_{م-٢} \quad ا_{م-١} \quad ا_م \quad ...$$

اور اسکے بعد م افقی صفین یہہ ہین

$$ب_٠ \quad ب_١ \quad ب_٢ \quad ... \quad ب_ن \quad ٠ \quad ٠ \quad ٠$$

$$٠ \quad ب_٠ \quad ب_١ \quad ... \quad ب_{ن-١} \quad ب_ن \quad ٠ \quad ٠$$

$$٠ \quad ٠ \quad ب_٠ \quad ... \quad ب_{ن-٢} \quad ب_{ن-١} \quad ب_ن \quad ٠$$

نوٹ = ایک ضرور ارتباط مثال مین ہونا چاہئی تاکہ خ (لا) اور مح (لا) ایک ہی وقت مین معدوم ہون

(۳۷۵) ایک جبریہ جملہ کو جو دوسرے جملہ پر تقسیم کرنے سے خارج قسمت پیدا ہوتا ہے اوسکو مقطع کی صورت مین نمایان کر سکتی ہین

فرض کرو کہ مح (لا) = ا. لا^م + ا۱ لا^م-۱ + ا۲ لا^م-۲ + ... + ار لا^م-ر + ...

صح (لا) = ب لا^ن + ب۱ لا^ن-۱ + ب۲ لا^ن-۲ + ... + ب ر لا^ن-ر + ...

اور خارج قسمت جو مح (لا) کو صح (لا) پر تقسیم کرنے سے پیدا ہو اوسے

ق. لا^م-ن + ق۱ لا^م-ن-۱ + ... + ق ر لا^م-ن-ر + ...

ق ر = (۱ / ب ر+۱) ×

ب.	۰	۰	۰ ———	ا.
ب۱	وب	۰	۰ ———	ا۱
ب۲	ب۱	وب۱	۰ ———	ا۲
ب۳	ب۲	ب۱	وب. ———	ا۳
ب ر	ب ر-۱	وب ر-۲	. . .	ا ر

اور یہہ امتحان سی ثابت ہو سکتا ہے کہ ر = . یا ۱ یا ۲ کے ہو اور علی العموم استقراء سے ثابت ہو سکتا ہے مثلاً ہم فرض کرتے ہین کہ ق. و ق۱ و ق۲ و ق۳ اور ق۴ اس قاعدہ کی موافق مناسب طور پر دریافت ہو جائیں اور ہم یہہ ثابت کرنا چاہتی ہین کہ ق۵ بہی ایسا ہے

صح (لا) کو خارج قسمت مین ضرب دو اور رح (لا) کے مساوی لکھو تو یہہ دریافت ہوگا

ا۵ = ق. ب۵ + ق۱ ب۴ + ق۲ ب۳ + ق۳ ب۲ + ق۴ ب۱ + ق۵ ب. ... (۱)

اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ ہم نے جو کچہ ق۵ کے واسطی حاصل کیا ہی وہ مطابق اوسکی ہے جو مقطع سی دریافت ہوا ہی فرض کرو کہ م مقطع کو تعبیر کرتا ہے تو

ر ب. = $\frac{1}{ب.^{۶}}$

ب.	و .	و .	و .	و .	و ا.
ب۱	و ب.	و .	و .	و .	و ا۱
ب۲	و ب۱	و ب.	و .	و .	و ا۲
ب۳	و ب۲	و ب۱	و .	و .	و ا۳
ب۴	و ب۳	و ب۲	و ب۱	و ب.	و ا۴
ب۵	و ب۴	و ب۳	و ب۲	و ب۱	و ا۵

= $\frac{1}{ب.}$ { -ص۵ ب۵ + ص۴ ب۴ - ص۳ ب۳ + ص۲ ب۲ - ص۱ ب۱ + ص ا۵ }

اسمین ص۵ و ص۴ و ص۳ و ص۲ و ص۱ و ص مقطعات ہین جو س سے اسطرح پیدا ہوتی ہین کہ ہمیشہ اخر صف افقی کو اور ایک عمودی صف کو متواتر محو کرتے ہین پس

ص. =

.	و .	و .	و .	و .	و ا.
ب.	و .	و .	و .	و .	و ا۱
ب۱	و ب.	و .	و .	و .	و ا۲
ب۲	و ب۱	و ب.	و .	و .	و ا۳
ب۳	و ب۲	و ب۱	و ب.	و .	و ا۴

= .

ا.	و .	و .	و .	و .
ا۱	و ب.	و .	و .	و .
ا۲	و ب۱	و ب.	و .	و .
ا۳	و ب۲	و ب۱	و ب.	و .
ا۴	و ب۳	و ب۲	و ب۱	و ب.

بموجب دفعہ ۴۴۳ کے پس دفعہ ۴۴۶ کو بار بار کام مین لا کر ہم کو ا. ب.۴ کی قیمت مقطع کی حاصل ہوگی پس

$$\frac{ص۵}{ب.^{۵}} = \frac{ا.}{ب.} = ق.$$

پھر ص۴ =

ب.	و .	و .	و .	و ا.
ب۱	و .	و .	و .	و ا۱
ب۲	و ب.	و .	و .	و ا۲
ب۳	و ب۱	و ب.	و .	و ا۳
ب۴	و ب۲	ب۱	و ب.	و ا۴

= -

ب.	و ا.	و .	و .	و .
ب۱	و ا۱	و .	و .	و .
ب۲	و ا۲	و ب.	و .	و .
ب۳	و ا۳	و ب۱	و ب.	و .
ب۴	و ا۴	و ب۲	و ب۱	و ب.

بموجب دفعہ ۳۴۴ کے اب دفعہ ۳۴۶ کی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\begin{vmatrix} ب. & ول. & و. & و \\ ب۱ & ول۱ & و. & و. \\ ب۲ & ول۲ & وب. & و. \\ ب۳ & ول۳ & وب۱ & و. \\ ب۴ & ول۴ & وب۲ & وب. \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ب. & ول. \\ ب۱ & ول۱ \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ب. & و. & و. \\ ب۱ & وب. & و. \\ ب۲ & وب۱ & وب. \end{vmatrix}$$

$$\text{پس ص۴} = -\begin{vmatrix} ب. & ول. \\ ب۱ & ول۱ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ب. & و. & و. \\ ب۱ & وب. & و. \\ ب۲ & وب۱ & وب. \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} ب. & ول. \\ ب۱ & ول۱ \end{vmatrix} ب.^۳ = -ق۱ ب.^۵$$

$$\text{اسیواسطے} \quad \frac{ص۴}{ب.^۵} = -ق۱$$

$$\text{پھر ص۳} = \begin{vmatrix} ب. & و. & و. & و. & ول. \\ ب۱ & وب. & و. & و. & ول۱ \\ ب۲ & وب۱ & و. & و. & ول۲ \\ ب۳ & وب۲ & وب. & و. & ول۳ \\ ب۴ & وب۳ & وب۱ & وب. & ول۴ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ب. & و. & ول. \\ ب۱ & وب. & ول۱ \\ ب۲ & وب۱ & ول۲ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ب. & و. \\ ب۱ & وب. \end{vmatrix} = ق۲ ب.^۵$$

$$\text{اسیواسطے} \quad \frac{ص۳}{ب.^۵} = ق۲$$

$$\text{اسیطرح} \quad \frac{ص۲}{ب.^۵} = ق۳$$

$$\frac{ص۱}{ب.^۵} = ق۴$$

$$\text{اور} \quad \frac{ص.}{ب.^۵} = ۱$$

پس ر ب. = - ق. ب۵ - ق۱ ب۴ - ق۲ ب۳ - ق۳ ب۲ - ق۴ ب۱ + ا۵ . (۲)

پس اب ہم یہہ دیکھتے ہیں کہ (۲) سے جو ر دریافت ہوا وہ بالکل مطابق ق۵ کے قیمت کے ہے جو (۱) سے دریافت ہوئی تھی اور یہی ثابت کرنا تھا ترکیب جو ق۵ کی نسبت ہم کام میں لائے

وہ عام ہی اور اسیواسطی جو قیمت کی قیمت اوپر تشخیص ہوئی ہی وہ صحیح اور درست ہے

(۳۷۶) اب ہم دو مثالون پر خاتمہ کرتے ہین

(۱) فرض کرو کہ مقطع $ن+۱$ رتبہ کا ہو جسمین تمام اجزاء ذاتی برابر واحد کے ہون الاوہ جو قطر کا سلسلہ بناتی ہین مستثنٰی ہین اور وہ $۱ + ا_۱$ و $۱ + ا_۲ \cdots ۱ + ا_ن$ ہین تو قیمت اس مقطع کی $ا_۱ ا_۲ \cdots ا_ن$ ہے

اسواسطی کہ اگر مقادیر $ا_۱$ و $ا_۲ \cdots ا_ن$ مین سی ایک معدوم ہو تو مقطع معدوم ہوتا ہے کیونکہ اوسکی دو افقی صفین مطابق ہوتی ہین اسواسطی مقطع $ا_۱ ا_۲ \cdots ا_ن$ پر تقسیم ہوتا ہی اور خارج قسمت اس تقسیم کا واحد ہوگا کیونکہ یہہ اول جز ترکیبی کی دیکھنی سی معلوم ہوتا ہی

(۲) فرض کرو کہ $ن$ رتبی کا مقطع ہی جسمین تمام اجزاء ذاتی سوا اوس سلسلہ قطر کے واحد ہین اور اس سلسلہ قطر مین $۱ + ا_۱$ و $۱ + ا_۲ \cdots ۱ + ا_ن$ ہین تو قیمت مقطع کی یہہ ہوگی کہ

$$ا_۱ ا_۲ \cdots ا_ن \left[۱ + \frac{۱}{ا_۱} + \frac{۱}{ا_۲} + \cdots + \frac{۱}{ا_ن}\right]$$

اسواسطے اگر مقادیر $ا_۱$ و $ا_۲ \cdots ا_ن$ مین سی کوئی ایک معدوم ہوجاے تو مقطع کی صورت پہلی مثال کی ایک صورت بنجایگی اور رقم $ا_۱ ا_۲ \cdots ا_ن$ اول جز ترکیبی مقطع پر خیال کرتے صحیح دریافت ہوتی ہے

مثالین

باب ۱

(۱) جب $لا^۵ + ۷ لا^۴ + ۳ لا^۳ + ۱۷ لا^۲ + ۱۰ لا - ۱۴$ کو $لا - ۴$ پر تقسیم کرین تو باقی اور خارج قسمت دریافت کرو

(۲) $(۱ + لا)^ن$ کو قوائے لا مین پہلا کر اول جملہ مشتقہ $(۱ + لا)^ن$ کا دریافت کرو

(۳) ثابت کرو کہ مساوات $لا^۴ + ۳ لا^۲ + لا - ۶ = ۰$ کی صرف ایک ہی قیمت ۱ اور ۲ کی درمیان ہوگی

باب ۲

(۱) مساوات $لا^{۴} = \pm \sqrt{-۱}$ کی ایک قیمت دریافت کرو

(۲) مساوات $لا^{۶} = -\sqrt{-۱}$ کی ایک قیمت دریافت کرو

باب ۳

(۱) وہ مساوات بناؤ جسکی قیمتیں ۱ و ۱ و −۱ و −۲ ہوں

(۲) وہ مساوات بناؤ جسکی قیمتیں $۱ \pm \sqrt{-۲}$ اور $۲ \pm \sqrt{-۳}$

(۳) اٹھویں درجہ کی مساوات ایسی بناؤ جسکی قیمت $\sqrt{۲} + \sqrt{-۳} + \sqrt{-۱}$ ہو

(۴) ان مساواتوں کو حل کرو مساوات کی ایک قیمت معلوم ہے

(۱) $لا^{۳} - لا^{۲} + ۳لا + ۵ = ۰$ اور قیمت معلوم $۲ - \sqrt{-۱}$

(۲) $لا^{۴} + ۴لا^{۳} + ۶لا^{۲} + ۴لا + ۵ = ۰$ اور قیمت معلوم $\sqrt{-۱}$

(۳) $لا^{۴} + لا^{۳} - ۲۵لا^{۲} + ۴۱لا + ۶۶ = ۰$ اور قیمت معلوم $\sqrt{۳} + \sqrt{-۲}$

(۴) $لا^{۴} + ۲لا^{۳} - ۴لا^{۲} - ۴لا + ۴ = ۰$ قیمت معلوم $\sqrt{۲}$

(۵) $لا^{۴} - ۲لا^{۳} - ۵لا^{۲} - ۶لا + ۲ = ۰$ قیمت معلوم $۲ + \sqrt{۳}$

(۶) $لا^{۶} - لا^{۵} - ۸لا^{۴} + ۲لا^{۳} + ۲۱لا^{۲} - ۹لا - ۵۴ = ۰$ قیمت $\sqrt{۲} + \sqrt{-۱}$

(۵) مساوات $لا^{۵} - لا^{۴} + ۸لا^{۲} - ۹لا - ۱۵ = ۰$ کو حل کرو ایک قیمت اوسکی $\sqrt{۳}$ اور دوسری قیمت $۱ - ۲\sqrt{-۱}$ ہے

(۶) مساوات $لا^{۳} - ۴لا^{۲} + لا + س = ۰$ کی ایک قیمت = ۳ اور قیمتیں اور س دریافت کرو

(۷) مساوات $لا^{۶} - ۶لا^{۵} + ۴۰لا^{۳} + ۶۰لا^{۲} - لا - ۱ = ۰$ کی شکافی قیمتوں کا مجموعہ اور قیمتوں کی مجذوروں کا مجموعہ اور شکافی قیمتوں کی مجذوروں کا مجموعہ دریافت کرو

(۸) مساوات $لا^{۴} - ۲۱لا^{۳} + ۱۶۶لا^{۲} - ۵۴۶لا + ۵۸۰ = ۰$ کی قیمتیں سہ اور صہ اور سہ + صہ + (سہ − صہ) $\sqrt{-۱}$ کی صورت کی ہیں مساوات کو حل کرو

(۹) مساوات معلوم کی قیمتوں کے مکعبوں کا مجموعہ دریافت کرو

(۴) مساوات $لا^۳ + ۲لا^۲ + \frac{۱}{۱۲}لا + \frac{۱}{۹} = ۰$ کی صورت بدلکر ایسی مساوات بناؤ کہ اشاں اوسکی اعداد صحاح ہوں اور اول رقم کا سر ایک ہو

(۵) دوسرے رقم کو دور کرو اور اس مساوات کو حل کرو:

$$لا^۳ - ۱۸لا^۲ + ۱۵۷لا - ۵۱۰ = ۰$$

(۶) ذیل کی مساواتوں میں سے ہر ایک مساوات کی ہیئت اسطرح تبدیل کرو کہ اوسکی قیمتیں مجذور مساوات کی قیمتوں کی تفاوت کا ہو اور قیمتوں کی خواص پر بحث لکھو

(۱) $لا^۳ + ۷لا - ۱ = ۰$ (۲) $لا^۳ - ۶لا + ۶ = ۰$

(۷) $لا^۴ - ۲لا^۳ + ۲لا - ۳ = ۰$ کی ہیئت بدلکر ایسی مساوات بناؤ کہ جسکی قیمتیں مشکانی مساوات معلوم کی قیمتوں کی ہوں اور ہیئت بدلی ہوئی جو مساوات حاصل ہو اوسکی قیمتوں کو بقدر واحد کے کم

(۸) ثابت کرو کہ مساوات $لا^۴ + لا^۲ - ۸لا - ۱۵ = ۰$ کی دو حقیقی قیمتیں مختلف العلامت ہیں اور دوسی زیادہ اوسکی حقیقی قیمتیں نہیں ہیں اور وہ ۲- اور ۳ کے درمیان واقع ہیں

(۹) مساوات $لا^۳ + ع لا^۲ + ق لا + ر = ۰$ کی قیمتیں ط و ص و س سے تعبیر ہوتی ہیں اس مساوات کی ہیئت بدلکر اور مساواتیں بناؤ جنکی قیمتیں بعینہ بہ تفصیل ذیل ہو

(۱) $ط^۲$ و $ص^۲$ و $س^۲$ (۲) $ص + س$ و $س + ط$ و $ط + ص$

(۳) $\frac{۱}{ص+س}$ و $\frac{۱}{س+ط}$ و $\frac{۱}{ط+ص}$ (۴) $\frac{ط}{ص س}$ و $\frac{ص}{س ط}$ و $\frac{س}{ط ص}$

(۵) $ص^۲ س^۲$ و $س^۲ ط^۲$ و $ط^۲ ص^۲$ (۶) $ط(ک - ط)$ و $ص(ک - ص)$ و $س(ک - س)$

(۷) $\frac{۱}{۲}(ص + س - ط)$ و $\frac{۱}{۲}(س + ط - ص)$ و $\frac{۱}{۲}(ط + ص - س)$

(۸) $\frac{ط}{ص+س}$ و $\frac{ص}{س+ط}$ و $\frac{س}{ط+ص}$ (۹) $\frac{ط}{ص+س-ط}$ و $\frac{ص}{س+ط-ص}$ و $\frac{س}{ط+ص-س}$

(۱۰) $ص س + \frac{۱}{ط}$ و $س ط + \frac{۱}{ص}$ و $ط ص + \frac{۱}{س}$ (۱۱) $ص^۲ + س^۲$ و $س^۲ + ط^۲$ و $ط^۲ + ص^۲$

(۱۲) $\frac{ص}{س} + \frac{س}{ص}$ و $\frac{س}{ط} + \frac{ط}{س}$ و $\frac{ط}{ص} + \frac{ص}{ط}$ (۱۳) $\frac{ص^۲+س^۲}{ص^۲ س^۲}$ و $\frac{س^۲+ط^۲}{س^۲ ط^۲}$ و $\frac{ط^۲+ص^۲}{ط^۲ ص^۲}$

(۱۴) $ص - س$ و $س - ص$ و $س - ط$ و $ط - س$ و $ط - ص$ و $ص - ط$

(۱۰) مساوات $لا^۳ + ق لا + ر = ۰$ کی قیمتیں ط و ص و س ہیں اسکی ہیئت بدل کر اور مساواتیں بناؤ جنکی قیمتیں معینہ بہ تفصیل ذیل ہوں

(۱) $\left(\frac{ط}{ص - س}\right)^۲$ و $\left(\frac{ص}{س - ط}\right)^۲$ و $\left(\frac{س}{ط - ص}\right)^۲$

(۲) ص ط + ط س و س ص + ص ط و ط س + س ص

(۱۱) اگر مساوات $لا^۳ - ۶ لا^۲ + ۱۱ لا - ۶ = ۰$ کی قیمتیں ط و ص و س ہوں تو وہ مساوات بناؤ جسکی قیمتیں

$\frac{۱}{ص^۲ + س^۲}$ و $\frac{۱}{س^۲ + ط^۲}$ و $\frac{۱}{ط^۲ + ص^۲}$ ہوں

(۱۲) اگر $لا^۳ - ۲ لا^۲ + ۲ = ۰$ کی قیمتیں ط و ص و س ہوں تو وہ مساوات بناؤ جسکی قیمتیں $\frac{ص^۳ + س^۳}{ط^۳}$ و $\frac{س^۳ + ط^۳}{ص^۳}$ و $\frac{ط^۳ + ص^۳}{س^۳}$ ہوں

(۱۳) ثابت کرو کہ تیسری رقم مساوات

$$لا^۳ + ع لا^۲ + ق لا + ر = ۰$$

کی ساقط نہیں ہو سکتی اگر $ع^۲$ چھوٹا ۳ ق سے ہو

(۱۴) ثابت کرو کہ دوسری اور چوتھی رقم مساوات

$$لا^۴ + ع_۱ لا^۳ + ع_۲ لا^۲ + ع_۳ لا + ع_۴ = ۰$$

کی ایک ہی تبدیل ہیئت سی ساقط ہو سکتی ہیں اگر $۸ ع_۳ = ع_۱ (۴ ع_۲ - ع_۱^۲)$

(۱۵) ان مساواتوں کو حل کرو

(۱) $لا^۴ + ۴ لا^۳ + ۷ لا^۲ + ۶ لا - ۱۰ = ۰$ (۲) $لا^۴ + ۴ لا^۳ + ۳ لا^۲ - ۲ لا - ۶ = ۰$

(۱۶) ثابت کرو کہ مساوات $لا^۴ + ۴ لا^۲ + ۶ لا + ۳ = ۰$ میں دوسری اور تیسری رقم ایک ہی تبدیل ہیئت سی نہیں ساقط ہو سکتی لیکن اگر لا میں ضرب دیں تو ہو سکتی ہے

(۱۷) ثابت کرو کہ ن درجہ کی مساوات میں سی دوسرے اور تیسرے رقموں کا ساقط کرنا ممکن ہے اگر

ن × (قیمتوں کے مجذوروں کے مجموعہ) = قیمتوں کے مجموعہ کے مربع

باب ۵

(۱) ثابت کرو کہ مساوات $\text{لا}^{۵} - ۴\text{لا}^{۲} + ۳ = ۰$ کی کم سی کم دو خیالی قیمتیں ہیں

(۲) ثابت کرو کہ مساوات $\text{لا}^{۷} - ۲\text{لا}^{۴} + \text{لا}^{۳} - ۱ = ۰$ کی کم سی کم چار خیالی قیمتیں ہیں

(۳) ذیل کی مساواتوں میں کیا نتایج حاصل ہو سکتی ہیں

(۱) $\text{لا}^{ن} - ۵\text{لا}^{۴} + \text{لا}^{۲} - \text{لا} - ۱ = ۰$ (۲) $\text{لا}^{۳ن} - \text{لا}^{۲ن} + \text{لا}^{ن} + \text{لا} + ۱ = ۰$

باب ۶

(۱) ان مساواتوں کو حل کرو ہر یک مساوات کی برابر قیمتیں ہیں

(۱) $\text{لا}^{۳} - ۷\text{لا}^{۲} + ۱۶\text{لا} - ۱۲ = ۰$ (۲) $\text{لا}^{۳} - ۳\text{لا}^{۲} - ۹\text{لا} + ۲۷ = ۰$

(۳) $\text{لا}^{۳} - \text{لا}^{۲} - ۸\text{لا} + ۱۲ = ۰$ (۴) $\text{لا}^{۳} - ۵\text{لا}^{۲} - ۸\text{لا} + ۴۸ = ۰$

(۵) $\text{لا}^{۳} - \text{لا} - \frac{۲}{۳\sqrt{۳}} = ۰$ (۶) $\text{لا}^{۳} - \text{لا} + \frac{۲}{۳\sqrt{۳}} = ۰$

(۷) $\text{لا}^{۳} + ۸\text{لا}^{۲} + ۲۰\text{لا} + ۱۶ = ۰$ (۸) $\text{لا}^{۴} - \frac{۱}{۲}\text{لا} + \frac{۳}{۱۶} = ۰$

(۹) $\text{لا}^{۴} - ۱۱\text{لا}^{۲} + ۱۸\text{لا} - ۸ = ۰$

(۱۰) $\text{لا}^{۴} - ۲\text{لا}^{۳} - \text{لا}^{۲} - ۴\text{لا} + ۱۲ = ۰$

(۱۱) $\text{لا}^{۴} - ۷\text{لا}^{۳} + ۱۳\text{لا}^{۲} + ۳\text{لا} - ۱۸ = ۰$

(۱۲) $\text{لا}^{۴} - ۴\text{لا}^{۳} - ۶\text{لا}^{۲} + ۳۶\text{لا} - ۲۷ = ۰$

(۱۳) $\text{لا}^{۴} + ۱۳\text{لا}^{۳} + ۳۳\text{لا}^{۲} + ۳۱\text{لا} + ۱۰ = ۰$

(۱۴) $۲\text{لا}^{۴} - ۱۲\text{لا}^{۳} + ۱۹\text{لا}^{۲} - ۶\text{لا} + ۹ = ۰$

(۱۵) $\text{لا}^{۴} + ۱۶\text{لا}^{۳} + ۷۹\text{لا}^{۲} + ۱۲۶\text{لا} + ۹۸ = ۰$

(۱۶) $۸\text{لا}^{۴} + ۴\text{لا}^{۳} - ۱۸\text{لا}^{۲} + ۱۱\text{لا} - ۲ = ۰$

(۱۷) $\text{لا}^{۵} - \text{لا}^{۴} - ۲\text{لا}^{۳} + ۲\text{لا}^{۲} + \text{لا} - ۱ = ۰$

(۱۸) $\text{لا}^{۵} - ۲\text{لا}^{۴} - ۶\text{لا}^{۳} + ۴\text{لا}^{۲} + ۱۳\text{لا} + ۶ = ۰$

(۱۹) $\text{لا}^{۵} - ۱۳\text{لا}^{۴} + ۶۷\text{لا}^{۳} - ۱۷۱\text{لا}^{۲} + ۲۱۶\text{لا} - ۱۰۸ = ۰$

(۲۰) لا^{6} − ۳ لا^{5} + ۶ لا^{4} − ۳ لا^{3} − ۳ لا^{2} + ۲ = ۰

(۲) وہ شرط دریافت کرو جسمیں کہ لا^{ن} − ع لا^{2} + ر = ۰ کی مساوی قیمتیں ہوں

(۳) اگر لا^{4} + ع لا^{3} + ق لا^{2} + ر لا + ص = ۰ کی تین برابر قیمتیں ہیں تو ثابت کرو کہ
ق^{2} − ۳ ع ر + ۱۲ ص = ۰

(۴) اگر لا^{ن} + ع$_{1}$ لا$^{ن-1}$ + ۰۰۰۰ + ع$_{ن}$ = ۰ کی دو مساوی قیمتیں برابر ط کے ہوں تو ثابت کرو کہ ع$_{1}$ لا$^{ن-1}$ + ۲ ع$_{2}$ لا$^{ن-2}$ + ۰۰۰ + ن ع$_{ن}$ = ۰ کی ایک قیمت ط ہے

(۵) اگر لا^{5} + ق لا^{3} + ر لا^{2} + ت = ۰ کی دو مساوی قیمتیں ہیں تو ثابت کرو کہ ایک اور تین سی قیمت مساوات درجہ دوم

لا^{2} − $\frac{۲ ق^{2}}{۵ ر}$ لا + $\frac{۵ ت}{۳ ر}$ − $\frac{۴ ق}{۱۵}$ = ۰ ہوگی

باب ۷

(۱) لا^{6} − ۵ لا^{5} + لا^{4} + ۱۲ لا^{3} − ۲ الا^{2} + ۱ = ۰ کی منفی اور مثبت قیمتوں کی حدود غائی دریافت کرو

(۲) لا^{4} − ۸ لا^{3} + ۱۲ لا^{2} + ۱۶ لا − ۳۹ = ۰ کو اسطرح لکھو کہ جسمیں ثابت ہو کہ ۱۴ اعلی حد غائی مثبت قیمتوں کی ہے

(۳) ثابت کرو کہ معادلات ذیل میں حقیقی قیمتیں حدود غائی جو معین کی گئی ہیں انکے درمیان واقع ہیں

(۱) لا^{4} − لا^{3} + ۴ لا^{2} − ۳ لا + ۱ = ۰ حدود معینہ $\frac{1}{۴}$ اور ۱

(۲) لا^{4} + لا^{3} − ۱۰ لا^{2} − لا + ۱۵ = ۰ حدود معینہ −۱۴ اور ۳

(۳) لا^{5} + ۵ لا^{4} + لا^{3} − ۱۶ لا^{2} − ۲۰ لا − ۱۶ = ۰ حدود معینہ −۵ اور ۴

(۴) (لا^{3} − ۲۶) (لا^{2} + ۵ لا + ۱) + ۶۰ لا = ۰ حدود معینہ −۵ اور ۳

(۵) (لا^{2} − ۴ لا − ۲)^{2} − ۳۴ = ۰ حدود معینہ −۲ اور ۶

(۶) لا^{5} + لا^{4} + لا^{2} − ۲۵ لا − ۳۶ = ۰ حدود معینہ −۵ اور ۵

(۴) معادلات ذیل میں نیوٹن کی ترکیب سی قیمتوں کی حدود غائی دریافت کرو

(۱) لا^{4} − لا^{3} − ۵ لا^{2} + ۸ لا − ۹ = ۰ (۲) لا^{4} − ۵ لا^{2} + ۶ لا − ۱ = ۰

(۳) لا^{۴} − لا^{۳} + ۴لا^{۲} + لا − ۴ = ۰ (۴) لا^{۴} − ۵لا^{۳} + ۱۱لا^{۲} − ۲۰ = ۰

(۵) لا^{۴} − ۲لا^{۳} − ۳لا^{۲} − ۱۵لا − ۳ = ۰

(۵) ثابت کرو کہ لا^{۵} + ۵لا^{۴} − ۲۰لا^{۲} − ۱۹لا − ۲ = ۰ کی ایک قیمت ۲ اور ۳ کے درمیان ہے اور کوئی قیمت بڑی ۳ سے نہیں ہے اور ایک قیمت −۵ اور −۴ کے درمیان واقع ہوتی ہے اور کوئی چھوٹی −۵ سے نہیں ہے

(۶) دفعہ ۱۰۲ کی ترکیب کو معادلات ذیل کی حقیقی قیمتوں کا مقام اور تعداد دریافت کرو

(۱) لا^{۳} − ۲۱لا + ۱۷ = ۰ (۲) لا^{۳} − ۳۲لا + ۲۰ = ۰

(۳) لا^{۳} − ۳لا + ۳ = ۰ (۴) ۴لا^{۳} + ۹لا^{۲} − ۲۱لا + ۲ = ۰

(۵) لا^{۶} − ط^{۵} لا^{۲} + س^{۶} = ۰ (۶) لا^{۲ن} − ع لا^{ن} + ر = ۰

(۷) ثابت کرو کہ مساوات ۳لا^{۴} + ۸لا^{۳} − ۶لا^{۲} − ۲۴لا + ر = ۰ کی
چار حقیقی قیمتیں ہیں اگر ر چھوٹا −۸ سے اور بڑا −۱۳ سے ہو اور دو حقیقی قیمتیں ہیں اگر ر بڑا −۸ سے اور چھوٹا ۱۹ سے ہو اور کوئی حقیقی قیمت نہیں ہوگی اگر ر بڑا ۱۹ سے ہو

باب ۸

(۱) معادلات ذیل کی قیمتیں ناطقہ محدودہ دریافت کرو

(۱) لا^{۳} − ۱۰۶لا − ۴۲۰ = ۰ (۲) لا^{۳} − ۹لا^{۲} + ۲۲لا − ۲۴ = ۰

(۳) لا^{۳} − ۲لا^{۲} − ۲۵لا + ۵۰ = ۰ (۴) ۲لا^{۳} − ۳لا^{۲} + ۲لا − ۳ = ۰

(۵) ۲لا^{۳} − ۲لا^{۲} − ۶لا + ۴ = ۰ (۶) ۳لا^{۳} − ۲۶لا^{۲} + ۳۴لا − ۱۲ = ۰

(۷) لا^{۴} − ۲لا^{۳} + ۸لا − ۱۶ = ۰ (۸) لا^{۴} − لا^{۳} − ۱۳لا^{۲} + ۱۶لا − ۴۸ = ۰

(۹) لا^{۴} − لا^{۳} − لا^{۲} + ۱۹لا − ۴۲ = ۰ (۱۰) لا^{۴} + ۸لا^{۳} − ۷لا^{۲} − ۴۹لا + ۵۶ = ۰

(۱۱) لا^{۵} − ۳لا^{۴} − ۹لا^{۳} + ۲۱لا^{۲} − ۱۰لا + ۲۴ = ۰

(۱۲) لا^{۶} − ۷لا^{۵} + ۱۱لا^{۴} − ۷لا^{۳} + ۱۴لا^{۲} − ۲۸لا + ۴۰ = ۰

(۲) اشکال مساوات ح(لا) = ۰ میں صحاح ہیں تو ثابت کرو کہ اگر ح(۰) اور ح(۱) دونو طاق اعداد ہوں تو مساوات کی قیمت اعداد صحیح نہیں ہو سکتیں

باب ۹

(۱) معادلات ذیل کو حل کرو ہر یک دو قیمتیں ا اور -ا کی صورت کی ہیں

(۱) لا^{۴} - ۲لا^{۳} - ۲لا^{۲} + ۸لا - ۸ = ۰ (۲) لا^{۴} + ۳لا^{۳} - ۷لا^{۲} - ۲۷لا - ۱۸ = ۰

(۳) لا^{۴} + ۳لا^{۳} + ۲لا^{۲} + ۹لا - ۳ = ۰ (۴) لا^{۴} + لا^{۳} - ۱۱لا^{۲} + ۹لا + ۱۸ = ۰

(۲) معادلات ذیل کو حل کرو ہر یک کی قیمتیں سلسلہ حسابیہ میں ہیں

(۱) لا^{۳} - ۶لا^{۲} + ۱۱لا - ۶ = ۰ (۲) لا^{۳} - ۹لا^{۲} + ۲۳لا - ۱۵ = ۰

(۳) لا^{۴} - ۸لا^{۳} + ۱۴لا^{۲} + ۸لا - ۱۵ = ۰ (۴) لا^{۴} + لا^{۳} - ۱۱لا^{۲} + ۹لا + ۱۸ = ۰

(۳) ان مساواتوں کو حل کرو بعض شرائط جو قیمتوں کے متعلق ہیں وہ اونکے ساتھہ بیان کی گئی ہیں

(۱) ۳لا^{۳} - ۲لا^{۲} - ۲۷لا + ۱۸ = ۰ حاصل ضرب دو قیمتوں کا ۲ ہے

(۲) لا^{۴} - ۳لا^{۲} - ۶لا - ۲ = ۰ حاصل ضرب دو قیمتوں کا -۱ ہے

(۳) لا^{۴} - ۴لا^{۳} + ۵لا^{۲} - ۱۶لا + ۴ = ۰ حاصل ضرب دو قیمتوں کا ۱ ہے

(۴) ۲لا^{۴} - ۵لا^{۳} + ۱۱لا^{۲} - ۱۱لا + ۶ = ۰ حاصل ضرب دو قیمتوں کا ۱ ہے

(۵) لا^{۴} - ۴۵لا^{۲} - ۴۰لا + ۸۴ = ۰ حاصل تفریق دو قیمتوں کا ۳ ہے

(۶) لا^{۵} - ۷لا^{۴} + ۱۵لا^{۳} - ۱۵لا^{۲} + ۱۴لا - ۸ = ۰ ایک قیمت دوسری سے دوچند ہے

(۴) معادلات ذیل کو حل کرو اونکی قیمتوں کی صورتیں معین ہیں

(۱) لا^{۳} - ۱۰لا^{۲} + ۲۷لا - ۱۹ = ۰ صورتیں ا و ۳ا و ۶ا

(۲) لا^{۴} - ۱۰لا^{۳} + ۳۵لا^{۲} - ۵۰لا + ۲۴ = ۰ صورتیں ا + ۱ و ا - ۱ و ب + ۱ و ب - ۱

(۳) ۶لا^{۴} - ۴۳لا^{۳} + ۱۰۷لا^{۲} - ۱۰۸لا + ۳۶ = ۰ اور صورتیں ا و ب و $\frac{۱}{ب}$ و $\frac{۱}{ا}$

(۴) لا^{۵} + ۸لا^{۴} + ۵لا^{۳} - ۵۰لا^{۲} - ۳۶لا + ۷۲ = ۰ صورتیں ا و ۲ا و ب و ۲ب و ا + ب

(۵) لا^{۶} - ۴لا^{۵} + ۱۰لا^{۴} - ۱۴لا^{۳} + ۴۴لا^{۲} - ۱۴لا + ۵۶ = ۰ صورتیں ا + $\sqrt{۲}$ ± $\sqrt{ب}$ و ± $\sqrt{ا}$

(۶) لا^{۶} - ۱۲لا^{۴} - ۲لا^{۳} + ۳۷لا^{۲} - ۱۰لا - ۱۰ = ۰ ± $\sqrt{ا}$ و ب ± $\sqrt{۲}$ و ± $\sqrt{ا}$

(۵) معادلات ذیل کو حل کرو ہر یک زوج میں ایک قیمت مشترک ہے

(۱) لا^{۳} − ۳ لا^{۲} − ۱۶ لا − ۱۲ = ۰ و لا^{۳} − ۷ لا^{۲} + ۵ لا + ۱۳ = ۰

(۲) لا^{۳} − ۳ لا^{۲} + ۱۱ لا − ۹ = ۰ و لا^{۳} − ۵ لا^{۲} + ۱۱ لا − ۷ = ۰

(۶) مساوات لا^{۳} − ۷ لا^{۲} + ۳۶ = ۰ اور لا^{۳} − ۳ لا^{۲} − ۱۰ لا + ۲۴ = ۰ کو حل کرو
پہلی مساوات کی ایک قیمت سہ چند دوسری مساوات کی ایک قیمت سے ہے

(۷) معادلات ذیل کو حل کرو جنمیں دو قیمتیں مشترک ہیں

لا^{۴} − ۲ لا^{۳} − ۷ لا^{۲} + ۲۶ لا − ۲۰ = ۰ و لا^{۴} + ۴ لا^{۳} − ۲ لا^{۲} − ۱۲ لا + ۸ = ۰

(۸) م اور ا کی رقموں میں اس مساوات

لا^{۴} + ع ا لا^{۳} + (م^{۲} + م) ا^{۲} لا^{۲} + ق ا^{۳} لا + ا^{۴} = ۰

کی قیمتیں جو سلسلہ حسابیہ میں ہیں دریافت کرو اور ع اور ق کو م اور ا کی رقموں میں تحقیق کرو

باب ۱۰

(۱) ان معادلات متکافیہ کو حل کرو

(۱) لا^{۴} − ۲ لا^{۳} + ۳ لا^{۲} − ۲ لا + ۱ = ۰ (۲) لا^{۴} + ۴ لا^{۳} − ۵ لا^{۲} + ۴ لا + ۱ = ۰

(۳) ۲ لا^{۴} − ۵ لا^{۳} + ۶ لا^{۲} − ۵ لا + ۲ = ۰ (۴) لا^{۴} + ۴ لا^{۳} − ۱۰ لا^{۲} + ۴ لا + ۱ = ۰

(۵) لا^{۵} − ۲ لا^{۴} − ۱۹ لا^{۳} − ۱۹ لا^{۲} − ۲ لا + ۱ = ۰ (۶) لا^{۵} − ۴ لا^{۴} + لا^{۳} + لا^{۲} − ۴ لا + ۱ = ۰

(۷) ۶ لا^{۵} − ۱۱ لا^{۴} − ۳۳ لا^{۳} + ۳۳ لا^{۲} + ۱۱ لا − ۶ = ۰

(۸) ۲ لا^{۶} − ۵ لا^{۵} + ۴ لا^{۴} − ۴ لا^{۲} + ۵ لا − ۲ = ۰

(۹) ۸ لا^{۶} − ۱۶ لا^{۴} − ۲۵ لا^{۳} − ۱۶ لا^{۲} + ۸ = ۰ (۱۰) ۱ + لا^{۵} = ا (۱ + لا)^{۵}

(۲) معادلات ذیل کی قیمتیں دریافت کرو اور انکا تنزل کرو

(۱) لا^{۷} − ۲ لا^{۵} + لا^{۴} + لا^{۳} − ۲ لا^{۲} + ۱ = ۰

(۲) لا^{۷} + ۲ لا^{۶} − ۸ لا^{۵} − ۷ لا^{۴} − ۷ لا^{۳} − ۸ لا^{۲} + ۲ لا + ۱ = ۰

(۳) لا^{۸} + ۲ لا^{۷} + ۱۳ لا^{۶} + ۲ لا^{۵} − ۲ لا^{۳} − ۳ لا^{۲} − ۲ لا − ۱ = ۰ (۴) لا^{۱۰} − ۱ = ۰

(۳) $لا^۳ + ع لا^۲ + ۱ = ۰$ کی قیمتوں کو

ا و ب و $\frac{۱}{ا}$ و $\frac{۱}{ب}$ کی صورت مین نمایان کرو

(۴) اگر ا و ب و س قیمتین مساوات مکررہ کی تعبیر کرین تو

$لا^ن + ع لا^{ن-۱} + ق لا^{ن-۲} + \cdots + ق لا^۲ + ع لا + ۱ = ۰$

$\frac{ا^۲}{ب^۲} + \frac{ا^۲}{س^۲} + \cdots + \frac{ب^۲}{س^۲} + \cdots + \frac{س^۲}{ا^۲} + \cdots = (ع^۲ - ۲ق)^۲ - ن$

(۵) مساوات مکررہ $لا^{۲ن} - ع لا^{۲ن-۱} + \cdots = ۰$ مین اگر قیمین علی التبادل مثبت اور منفی ہون اور ع بڑا ۲ن سی نہ ہو تو قیمتین تمام حقیقی نہیں ہونگیں

باب ۱۱

(۱) معادلات ذیل کو حل کرو

(۱) $لا^۷ - ۱ = ۰$ (۲) $لا^۹ - ۱ = ۰$ (۳) $لا^۸ + ۱ = ۰$

(۲) ثابت کرو کہ اجزاء ضربی $ا^۳ + ب^۳ + س^۳ - ۳ا ب س$ کی صورتین $ا + ب ے + س ے^۲$ ہین جسمین $ے^۳ - ۱ = ۰$

(۳) ثابت کرو کہ اجزاء ضربی

$ا^۲(ا^۲ - ۴ب د - س^۲) - ب^۲(ب^۲ - ۴ا س - د^۲) + س^۲(س^۲ - ۴ب د - ا^۲) - د^۲(د^۲ - ۴ا س - ب^۲)$

کے اس صورت $ا + ب ک + س ک^۲ + د ک^۳$ کے ہین جسمین $ک^۴ - ۱ = ۰$

باب ۱۲

(۱) ان مساواتون کو حل کرو

(۱) $لا^۳ - ۳لا - ۲ = ۰$ (۲) $لا^۳ - ۹لا - ۲۸ = ۰$

(۳) $لا^۳ - لا + ۶ = ۰$ (۴) $لا^۳ + ۳لا = \frac{۳}{۴}$

(۵) $۳لا^۳ - ۶لا^۲ - ۲ = ۰$ (۶) $لا^۳ - ۱۵لا^۲ - ۳۳لا + ۸۴۷ = ۰$

(۷) $لا^۳ + ۱۶لا^۲ = ۳۶ \frac{۳}{۳}$ (۸) $لا^۳ - ۳(ا^۲ + ب^۲)لا = ۲ا(ا^۲ - ۳ب^۲)$

(۲) مساوات لا^۳ + ق لا + ر = ۰ کی یہہ صورت لا^۴ = (لا^۲ + ا لا + ب)^۲ بن جای اسکی
واسطی ق اور ر مین کیا ارتباط ہونا ضرور ہے
اور پہر اوس ارتباط سے مساوات ۸ لا^۳ − ۳۶ لا + ۲۷ = ۰ حل کرو

(۳) اگر مساوات لا^۳ + ع لا^۲ + ق لا + ر = ۰ کی قیمتین سلسلہ ہندسیہ مین ہون تو ر ع^۳ = ق^۳
اسی مساوات لا^۳ − لا^۲ + ۲ لا − ۸ = ۰ کو حل کرو

(۴) اگر مساوات لا^۳ + ق لا + ر = ۰ کی قیمتین بقدر ھ کے کم کیجایئن تو ثابت کرو
ہئیت بدلی ہوئی مساوات جو حاصل ہوگی اوسکی قیمتین سلسلہ ہندسہ مین ہونگین بشرطیکہ ھ ایسا ہو کہ
۲۷ ر ھ^۳ − ۹ ق ھ^۲ − ق^۳ = ۰

(۵) اگر مساوات لا^۳ + ۳ ع لا^۲ + ۳ ق لا + ر = ۰ کی قیمتین سلسلہ موسیقہ مین ہو تو
۲ ق^۳ = ر (۳ ع ق − ر)

(۶) اگر مساوات لا^۳ + ۳ ع لا^۲ + ۳ ق لا + ر = ۰ کی قیمتین سلسلہ موسیقہ مین ہون تو
مساوات ر لا^۲ + ۲ ق^۲ لا + ق ر = ۰ مین سبسے بڑی اور سب سی چہوٹی قیمتین شامل ہونگین

(۷) لا^۳ + ق لا + ر = ۰ کی ناممکن قیمتین صورت س ± ص $\sqrt{-1}$ کی ہین
تو ثابت کرو کہ ص^۲ = ۳ س^۲ + ق ۰

(۸) اگر ر و س + ص $\sqrt{-1}$ و س − ص $\sqrt{-1}$ مین قیمتین مساوات لا^۳ + ع$_۱$ لا^۲ + ع$_۲$ لا + ع$_۳$ = ۰
کی ہون اونمین سی ر حقیقی قیمت ہی اور مساوات لا^۳ + م$_۱$ لا^۲ + م$_۲$ لا = ۰ اسطرح پیدا ہوئی ہو
کہ اوپر کی مساوات کی قیمتین بقدر ر کے کم کردین تو ثابت کرو کہ
س = − م$_۱$/۲ + ر اور ص = − ۱/۴ (م$_۲$ + ۳ ع$_۲$ − ع$_۱^۲$)

(۹) مساوات لا^۳ + ع لا^۲ + ق لا + ر = ۰ کو صورت
ی^۳ − ۳ ی + م = ۰ کی طرف لا = ا ی + ب فرض کرکی تحویل کرو اور اس مساوات کو
ی = ی + ۱/ی فرض کرکے حل کرو اور اسی ثابت کرو کہ اگر اصلی مساوات کی برابر قیمتین ہون تو

۴(ع^{۲} - ۳ق)^{۳} = (۲ع^{۳} - ۹ع ق + ۲۷ر)^{۲}

(۱۰) اگر مساوات لا^{۳} + ع لا^{۲} + ق لا + ر = ۰ کی قیمتین سلسلہ موسیقہ مین ہین تو اس مساوات کی قیمتین بہی سلسلہ موسیقہ مین ہونگین

(ع ق - ر) ی^{۳} - (ع^{۲} - ۲ع ق + ۳ر) ی^{۲} + (ع ق - ۳ر) ی - ر = ۰

باب ۱۳

(۱) معادلات ذیل کو حل کرو

(۱) لا^{۴} ± ۴لا^{۳} + ۳لا^{۲} - ۴۴لا - ۸۴ = ۰ (۲) لا^{۴} - ۶لا^{۲} - ۸لا - ۳ = ۰

(۳) لا^{۴} - ۲۱لا^{۳} + ۴۹لا^{۲} - ۷۸لا + ۴۰ = ۰

(۴) لا^{۴} - ۲ا لا^{۳} + (ا^{۲} - ۲ب^{۲}) لا^{۲} + ۲ا ب^{۲} لا - ا^{۲} ب^{۲} = ۰ دفعہ ۱۹۲

(۲) اگر ر^{۲} - ع^{۲} ص = ۰ تو مساوات لا^{۴} + ع لا^{۳} + ق لا^{۲} + ر لا + ص = ۰ مساوات درجہ دوم کی طرح حل ہو جائیگی

(۳) اگر ص اور ع مثبت ہون اور ۲۷ع^{۴} چھوٹی ۲۵۶ص سی ہو تو مساوات لا^{۴} + ع لا^{۳} + ص = ۰ کی قیمتین سب خیالی ہونگین

(۴) مساوات لا^{۴} + ق لا^{۲} + ر لا + ص = ۰ کی قیمتین صورت سہ ± صہ$\sqrt{-۱}$ فرض کرکے ثابت کرو کہ سہ اور صہ کی قیمتین ان مساواتون سی دریافت ہو سکتی ہین کہ

۶۴ سہ^{۶} + ۳۲ق سہ^{۴} + (۴ق^{۲} - ۱۶ص) سہ^{۲} - ر^{۲} = ۰ و صہ^{۲} = سہ^{۲} + $\frac{ق}{۲}$ + $\frac{ر}{۴ سہ}$

باب ۱۴

(۱) معادلات ذیل مین قیمتین بعض سٹرم کے جملون کی متعین ہو چکی ہین اونکی حقیقی قیمتون کا مقام حسب ضابطہ سٹرم صاحب کی دریافت کرو

(۱) لا^{۴} - ۴لا^{۳} - ۳لا + ۲۳ = ۰ و ح$_{۳}$(لا) = -۱۹۱ + ۴۹لا،

(۲) لا^{۴} - ۴لا^{۳} + لا^{۲} + ۶لا + ۲ = ۰ و ح$_{۲}$(لا) = ۵لا^{۲} - ۱۰لا - ۷

ح$_{4}$(۴) = +

(۳) لا^{4} + لا^{3} + لا − ۱ = ۰ و ح$_{2}$(لا) = ۳ لا^{2} − ۱۲لا + ۱۷ دفعہ ۱۹۹

(۴) لا^{5} − ۲لا^{4} + لا^{3} − ۸لا + ۶ = ۰ و ح$_{3}$(لا) = ۱۶ لا^{2} − ۲۳لا + ۹

(۵) لا^{5} + ۵لا^{4} − ۲۰لا^{2} − ۱۹لا − ۲ = ۰ و ح$_{2}$(لا) = −۲ لا^{3} + ۶۰ لا^{2} + ۳۶لا − ۹

ح$_{3}$(لا) = ۹۶ لا^{2} + ۱۸۷لا + ۶۷ و ح$_{4}$(لا) = ۴۳۶۵۱ لا + ۵۴۵۷۱

ح$_{5}$(لا) = +

(۲) سٹرم کی ضابطہ سے ثابت کرو کہ معادلات ذیل میں ایک حقیقی قیمت ہے اور اوسکا مقام دریافت کرو

(۱) لا^{3} + ۶لا^{2} + ۱۰لا − ۱ = ۰ (۲) لا^{3} − ۶لا^{2} + ۸لا + ۴۰ = ۰

(۳) مساوات لا^{4} − ۲لا^{3} + ۳لا^{2} − ۵لا − ۱ = ۰ مثبت قیمتوں کا مقام معلوم ہے اور معلوم ہی کہ ح$_{2}$(لا) = ۶لا (لا − ۱)^{2} + ۱۹لا + ۶

(۴) معادلات ذیل میں سٹرم کے ضابطہ کو کام میں لاؤ

(۱) لا^{3} + لا^{2} − ۲لا − ۱ = ۰ (۲) لا^{3} − ۴لا^{2} − ۴لا + ۲۰ = ۰

(۳) لا^{4} + ۲لا^{3} − لا^{2} − ۴لا + ۱۰ = ۰ (۴) لا^{4} − لا + ۱ = ۰

باب ۱۵

(۱) ثابت کرو کہ مساوات

$$\text{لا}^{5} - ۳\text{لا}^{4} - ۲۴\text{لا}^{3} + ۹۵\text{لا}^{2} - ۴۶\text{لا} - ۱۰۱ = ۰$$

کی تمام حقیقی قیمتیں درمیان −۱۰ اور ۱۰ کے ہیں اور ایک حقیقی قیمت اوسکی −۱۰ اور −۱ کے درمیان اور ایک قیمت −۱ اور ۰ کے درمیان اور کوئی قیمت ۰ اور ۱ کے درمیان نہیں ہے اور کم سے کم ایک قیمت ۱ اور ۱۰ کے درمیان ہے

(۲) اس مساوات میں ضابطہ فوریر کو کام میں لاؤ کہ

لا^۴ + ۳لا^۳ + ۷لا^۲ + ۱۰لا + ۱ =

باب ۱۶

(۱) لاگرانژ کی ترکیب کے موافق مثبت تقریبی قیمت مساوات ۳لا^۲ − ۴لا − ۱ = ۰ کی دریافت کرو

(۲) لاگرانژ کی ترکیب کے موافق مساوات لا^۴ + لا^۳ − ۲لا^۲ − ۳لا − ۳ = ۰ تقریبی قیمتیں ۱ اور ۲ کے درمیان دریافت کرو

باب ۱۷

(۱) حدود غائی جو معین کی گئی ہیں اونکی درمیان جو قیمتیں معادلات ذیل کی واقع ہوں اونکو نیوٹن صاحب کی ترکیب سے نکالو

(۱) لا^۳ − ۴لا − ۱۲ = ۰ قیمت ۲ اور ۳ کی درمیان

(۲) لا^۳ − ۴لا^۲ − ۷لا + ۲۴ = ۰ قیمت ۲ اور ۳ کے درمیان

(۳) لا^۳ − ۴۲لا + ۴۴ = ۰ قیمت ۲٫۳ و ۲٫۳ کے درمیان

(۴) لا^۳ − ۱۵لا − ۵ = ۰ قیمت ۴ اور ۱۰۴ کے درمیان

(۵) لا^۴ − ۸لا^۳ + ۱۲لا^۲ + ۸لا − ۴ = ۰ قیمت ۰٫۱ اور ۱ کے درمیان

(۲) معادلات ذیل کی ایک قیمت کی دریافت کرنی میں نیوٹن صاحب کی ترکیب کام میں لاؤ

(۱) لا^۳ + ۳لا − ۵ = ۰ (۲) لا^۳ − ۳لا^۲ − ۳لا + ۲۰ = ۰

باب ۱۸

( ) معادلات ذیل میں جو حدود غائی متعین کی گئی ہیں اونکی درمیان معادلات کی قیمت ہورنر کی ترکیب سے دریافت کرو

(۱) لا^۳ + ۱۰لا^۲ + ۶لا − ۱۲۰ = ۰ قیمت درمیان ۲ و ۳

(۲) لا^۴ − ۲لا^۳ + ۲۱لا − ۲۳ = ۰ قیمت درمیان ۱ و ۲ کے

(۳) لا^۴ − ۵لا^۳ + ۳لا^۲ + ۳۵لا − ۷۰ = ۰ قیمت درمیان ۱۲ اور ۳ کے

(۲) حل کرو مساوات لا^۳ - ۱۷ = ۰ کو موافق ہورنر کی ترکیب کی

(۳) قیمتوں کا حساب ہورنر کی ترکیب کے موافق معادلات ذیل کا کرو

(۱) لا^۳ + لا - ۳ = ۰ (۲) لا^۳ + ۲ لا - ۲۰ = ۰

(۳) ۳ لا^۳ + ۵ لا - ۴۰ = ۰ (۴) لا^۳ + ۱۰ لا^۲ + ۸ لا - ۱۲۰ = ۰

باب ۱۹

(۱) مساوات لا^۳ + ع لا^۲ + ق لا + ر = ۰ کی قیمتوں ا و ب و س کی بالقرینہ جملوں کی قیمت دریافت کرو

(۱) (ا + ب + اب) (ب + س + ب س) (س + ا + س ا)

(۲) (ا + ب - ۲ س) (ب + س - ۲ ا) (ا + س - ۲ ب)

(۳) حج (ا + ب)^۲ (ا + س) (۴) حج (ا + ب - ۲ س) (ب + س - ۲ ا)

(۵) حج ا ب / (ا + ب) (۶) حج ا^۲ / ب س (۱ + ب/ا) (۱ + س/ا)^۲

(۷) (ب - س)^۲ (س - ا)^۲ (ا - ب)^۲

(۲) اگر ا و ب و س قیمتیں مساوات

لا^۴ + ع لا^۳ + ق لا^۲ + ر لا + ص = ۰

کی ہوں تو قیمت حج (ا + ب) (س + د) کی دریافت کرو

(۳) مساوات لا^ن + ع~۱~ لا^ن-۱ + ۰ ۰ + ع~ن-۱~ لا + ع~ن~ = ۰ کی قیمتیں ا و ب و س ۰ ۰ ل فرض کر کے دریافت کرو

(۱) حج ا^۲ ب (۲) حج (ا + ب) (ا + س) ۰ ۰ (ا + ل)

(۳) حج (ا + ب)^۲ / ا ب (۴) حج ا^۲ / ب

(۵) ایسی مساوات بناؤ جسکی قیمتیں مساوات لا^۴ + ع لا^۳ + ر لا + ص = ۰ کی ہر تین قیمتوں کی مجموعوں کی مجذور کے برابر ہوا اور نیز ایسی مساوات بھی بتاؤ کہ جسکی قیمتیں برابر

ہر تین قیمتوں کی مجذوروں کے مجموعے کے ہو

(۵) اگر ص اور ص۲ وص۳ ۰۰ مجموعہ اول اور دوم اور سوم ۰ ۰ مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتوں کا ہو اور مساوات ن درجہ کی ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{لا ح(لا)}{ح لا} = ن + \frac{ص_۱}{لا} + \frac{ص_۲}{لا^۲} + \frac{ص_۳}{لا^۳} + \cdots$$

(۶) اگر مساوات $لا^ن + ع_۱ لا^{ن-۱} + ع_۲ لا^{ن-۲} + ع_۳ لا^{ن-۳} + \cdots + ع_ن = ۰$ ایک اور صورت مین تبدیل ہو جسکی قیمتین اصلی مساوات کی قیمتوں کی ہر زوج کی برابر ہوں تو اول مین امثال بدلی ہوئی مساوات کی دریافت کرو

باب ۲۰

(۱) معادلات ذیل کو اون مساواتوں کی صورت مین تبدیل کرو جنکی قیمتین اصلی معادلات کی قیمتوں کی فرقون کی مجذور ہوں

(۱) $لا^۳ - ۴ لا + ۲ = ۰$ (۲) $لا^۴ + ۴ لا + ۳ = ۰$ (۳) $لا^۴ + ۱ = ۰$

(۲) لا کو ان مساواتون $الا^۲ + ب لا + س = ۰$ اور $ا' لا^۲ + ب' لا + س' = ۰$ سے ساقط کرو

باب ۲۱

(۱) معادلات ذیل کی قیمتوں کی جو قوت متعین کی گئی ہے وہ دریافت کرو

(۱) $لا^۴ - لا^۳ - ۱۹ لا^۲ + ۴۹ لا - ۳۰ = ۰$ مین مکعب

(۲) $لا^۵ - ۳ لا^۳ - ۵ لا + ۱ = ۰$ مین چوتھی قوت

(۳) $لا^۵ - ۲ لا^۴ - ۲۲ لا^۳ - ۲۸ لا^۲ + ۷۲ لا + ۱۴۴ = ۰$ مین مکعب

(۴) $لا^۴ + ۴ + ۱ = ۰$ مین معکوس مربعات

(۵) $لا^۲ - لا - ۱ = ۰$ مین چھٹی قوت

(۲) اگر مساوات $لا^ن + لا + ۱ = ۰$ کی قیمتوں کی ردین قوتون کا مجموعہ $ص_ر$ سے تعبیر کیا جاے اور ر اور ان کی متکافی قیمتوں کی ردین قوت کا مجموعہ $ح_ر$ سے

تو ثابت کرو کہ

$$ص_{ن-۱} - ص_{ن} = ۱۱ \text{ اور } ح_{ن-۱} - ح_{ن} = ن - ۲ - (۱-)^{ن}$$

(۴) مساوات $لا^{ن} - لا^{۲} + ۱ = ۰$ مین ن کو سہ سی بڑا فرض کرکے ح $ا^{ن-۳}$ و ح $ا^{ن-۲}$ اور ح $ا^{ن}$ کو دریافت کرو

(۵) مساوات $لا^{۲} - ع لا + ق = ۰$ مین ن کو بڑا رسی فرض کرکے قیمتوں کی روین قوتوں اور (۲ن) وین قوتوں کا مجموعہ دریافت کرو

باب ۲۲

(۱) ان مساواتوں کو حل کرو

$$\begin{cases} (ی-۱)\, لا^{۲} + ی\, لا + ی^{۲} - ۲ ی = ۰ \\ (ی-۱)\, لا + ی = ۰ \end{cases}$$

(۲) ان مساواتوں کو حل کرو

$$(ی-۱)\, لا^{۳} + ی(ی+۱)\, لا^{۲} + (۳ی^{۲} + ی - ۲)\, لا + ۲ ی = ۰$$

$$(ی-۱)\, لا^{۲} + ی(ی+۱)\, لا + ۳ ی^{۲} - ۱ = ۰$$

(۳) ثابت کرو کہ ذیل کی مساواتوں کا کوئی حل نہیں ہے

$$\begin{cases} ی\, لا^{۳} - (ی^{۳} - ۳ ی - ۱)\, لا + ی = ۰ \\ لا^{۲} - ی^{۲} + ۳ = ۰ \end{cases}$$

باب ۲۳

(۱) مساوات $ی^{۴} لا - ی^{۳} لا^{۲} + ۳ ی لا^{۳} - ی^{۲} لا + ۴ ی - ۲ لا = ۰$ مین ی کی ہر یک قیمت لا کی قوائے متنازلہ مین جب پہیلائی جائی تو اوسکی اول رقم ہر یک قیمت مین دریافت کرو

(۲) مساوات $لا^{۱۲} + لا^{۱۱} + لا^{۱۱} ی - لا^{۸} ی^{۲} + ۲ لا^{۷} ی^{۳} - لا^{۴} ی^{۴} + ی^{۶} - ۳ لا ی^{۹} + لا^{۱۴} ی^{۱۳} = ۰$ مین ی کی ہر یک قیمت لا کی قوائے متصاعدہ مین جب پہیلائی جاتی تو اوسکی اول رقم ہر یک قیمت مین دریافت کرو

امثلہ متفرقہ

(۱) اگر ق مقادیر ا و ب و س ۰ ۰ ہون اور ن جملے اس صورت کے

$$\frac{(لا - ب)\ (لا - س)\ \cdots}{(ا - ب)\ (ا - س)\ \cdots}$$

لی جائیں تو ثابت کرو کہ ان جملون کا مجموعہ واحد ہے

(۲) مساوات $لا^{۵} + ۵\,لا^{۴} + ۲۰۰\,لا^{۳} - ۱۱\,لا + ۶ = ۰$ مین وہ رقم دور کرو جسمین لا کا مکعب ملتف ہے

(۳) بتلاؤ کہ ایک مساوات کو جسمین دو تغیرات اور تواترات ہون کسطرح ایسی مساواتون مین تبدیل کرین کہ

(۱) جسمین صرف تواترات علامت ہون (۲) جسمین صرف تغیرات ہون

(۴) اگر ع اور ق مثبت ہون تو مساوات $لا^{ن} - ع\,لا^{ر} + ق = ۰$ کی
چار حقیقی مختلف قیمتین ہونگی اگر $\left(\frac{ر ع}{ن}\right)^{ن}$ بڑا بہ نسبت $\left(\frac{ر ق}{ن - ر}\right)^{ن - ر}$ کے ہو
اور کوئی حقیقی قیمت نہین ہوگی اگر $\left(\frac{ر ع}{ن}\right)^{ن}$ چھوٹا بہ نسبت $\left(\frac{ر ق}{ن - ر}\right)^{ن - ر}$
کے ہو اور اوسکی دو زوج قیمتون کی برابر ہونگی اگر $\left(\frac{ر ع}{ن}\right)^{ن} = \left(\frac{ر ق}{ن - ر}\right)^{ن - ر}$

(۵) اگر $- ع_{ن - ق}\,لا^{ن - ق}$ و $- ع_{ن - ر}\,لا^{ن - ر}$ و $- ع_{ن - ص}\,لا^{ن - ص}$ ۰ ۰ ۰
منفی رقمیں ایک ن درجی کی مساوات کی ہو تو سب سے بڑی قیمت مساوات کی
مقادیر $(ع_{ن - ق})^{\frac{۱}{ق}}$ و $(ع_{ن - ر})^{\frac{۱}{ر}}$ و $(ع_{ن - ص})^{\frac{۱}{ص}}$ ۰ ۰ ۰
مین سب سے بڑی دو مقدارون کے مجموعہ کے برابر ہوگی

(۶) اگر ن درجہ کی مساوات کی آخر رقم ک ہو اور اس مساوات کی قیمتیں سلسلہ ہندسیہ مین ہون
تو ثابت کرو کہ اگر ن طاق ہو تو $ک^{\frac{۱}{ن}}$ قیمت مساوات کی ہوگی
اور ثابت کرو کہ اسیطرح ایک قیمت اوس طاق درجہ کی مساوات کی جسکی قیمتیں سلسلہ
حسابیہ مین یا سلسلہ موسیقیہ مین ہون دریافت ہو سکتی ہے

(۷) دفع اعظم

$$لا^{۵} - ۶\,لا^{۴} + ۷\,لا^{۳} + ۷\,لا^{۲} - ۶\,لا - ۲ = ۰$$

اور $لا^۳ - لا^۲ - ۳لا - ۱ = ۰$ کا دریافت کرو اور مساوات

$$لا^۵ - ۶لا^۴ + ۷لا^۳ + ۷لا^۲ - ۶لا - ۳ = ۰$$

کو حل کرو

(۸) مساوات $لا^۴ + ق لا^۲ + رلا + ص = ۰$ کی قیمتیں بقدر ھ کے کم کرو اور ھ کی ایسی قدر مقرر کرو کہ بدلی ہوئی مساوات کی قیمتیں صورت ا و $\frac{۱}{ا}$ و ب و $\frac{۱}{ب}$ کی ہوں اور بتلاؤ کہ یہہ مساوات کسطرح حل ہو سکتی ہے

مثال $لا^۴ - ۲لا^۲ + ۱۶لا + ۱ = ۰$

(۹) جبریہ جملوں کے جذر نکالنے کا جو عمل ہے اوس سے ثابت کرو کہ مساوات $لا^۴ + ع لا^۳ + ق لا^۲ + رلا + ص = ۰$ کی تحویل درجہ دوم کی مساواتوں کی طرف ہوجائیگی اگر $ع^۲ ص - ۴ق ص + ر^۲ = ۰$

یا اگر $ع^۳ - ۴ع ق + ۸ر = ۰$

(۱۰) ثابت کرو کہ مساوات $لا^۴ + \frac{۳}{۲} ق لا^۲ + رلا + ص = ۰$ تمام حقیقی قیمتیں نہیں ہو سکتیں اگر $ق^۳ + ر^۲$ مثبت ہو

(۱۱) اگر ح (لا) جملہ ناطقہ صحیحہ لا کا ہو تو کیا ح (لا) = ۰ یا ح' (لا) = ۰ کی یقینی ایک حقیقی قیمت ہے

(۱۲) ایک مساوات مکعبی قیمتوں کا یہہ جملہ $ا^۲ب + ب^۲س + س^۲ا$ نصف بالقرینہ ہے تو بتاؤ اوسکی قیمت کیونکر دریافت کریں

(۱۳) فرض کرو کہ ا و ب و س و ... ک ن درجہ کی مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتیں ہوں اور اپنی سادی صورتوں میں ہوں اور یہہ سب قیمتیں غیر مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ جملہ

$$\frac{ا^ر}{ح'(ا)} + \frac{ب^ر}{ح'(ب)} + \frac{س^ر}{ح'(س)} + \cdots + \frac{ک^ر}{ح'(ک)}$$

برابر واحد کے ہے اگر ر = ن - ۱ اور برابر صفر کے ہے اگر ر برابر صفر کے ہے یا اوس مثبت صحیح عدد کی ہے جو ن - ۱ سے کم ہے اور یہہ بھی ثابت کرو کہ اگر

ر = -۱ تو جملہ $= \frac{(-۱)^{ن-۱}}{ا ب س \cdots ک}$